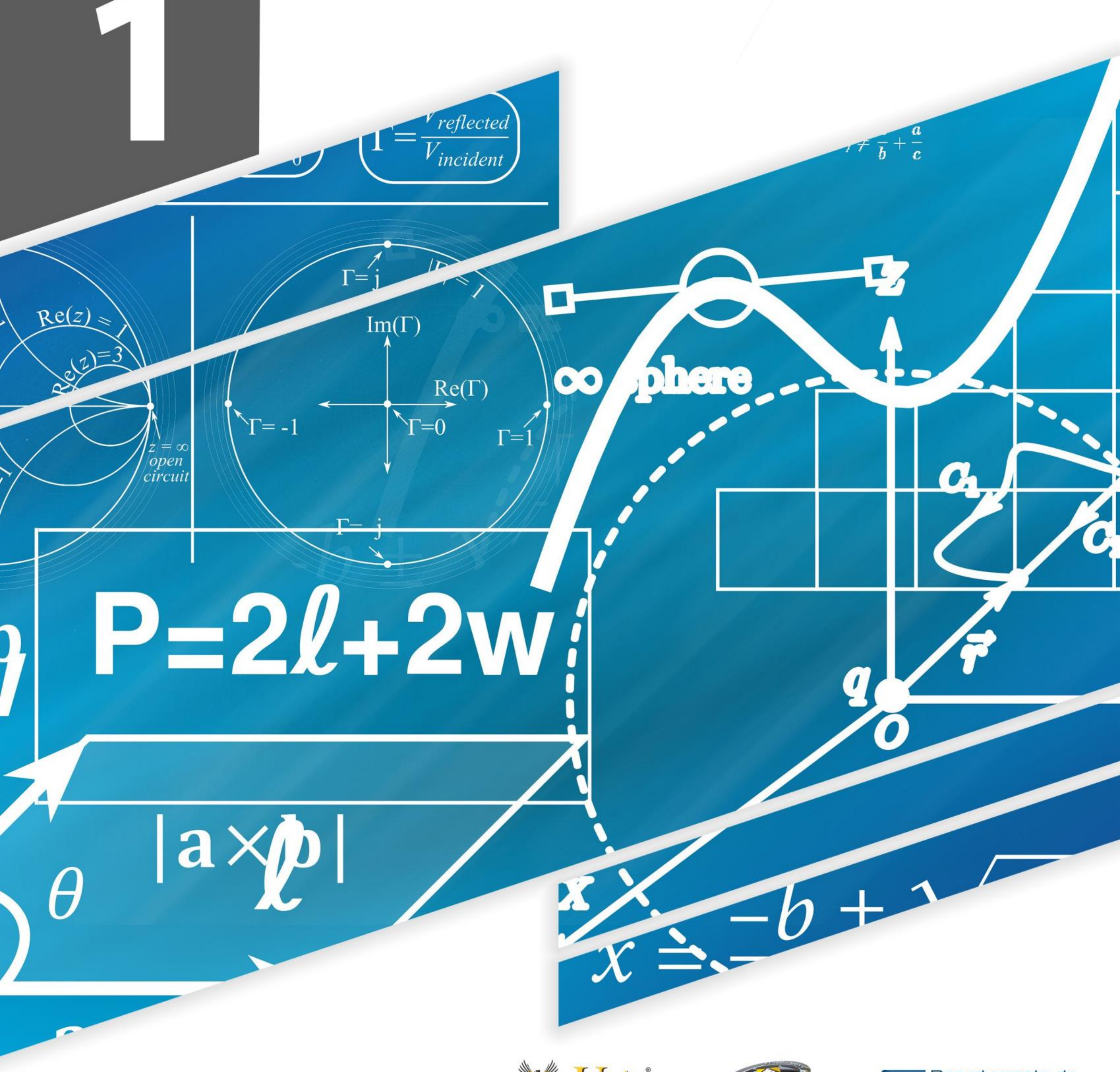
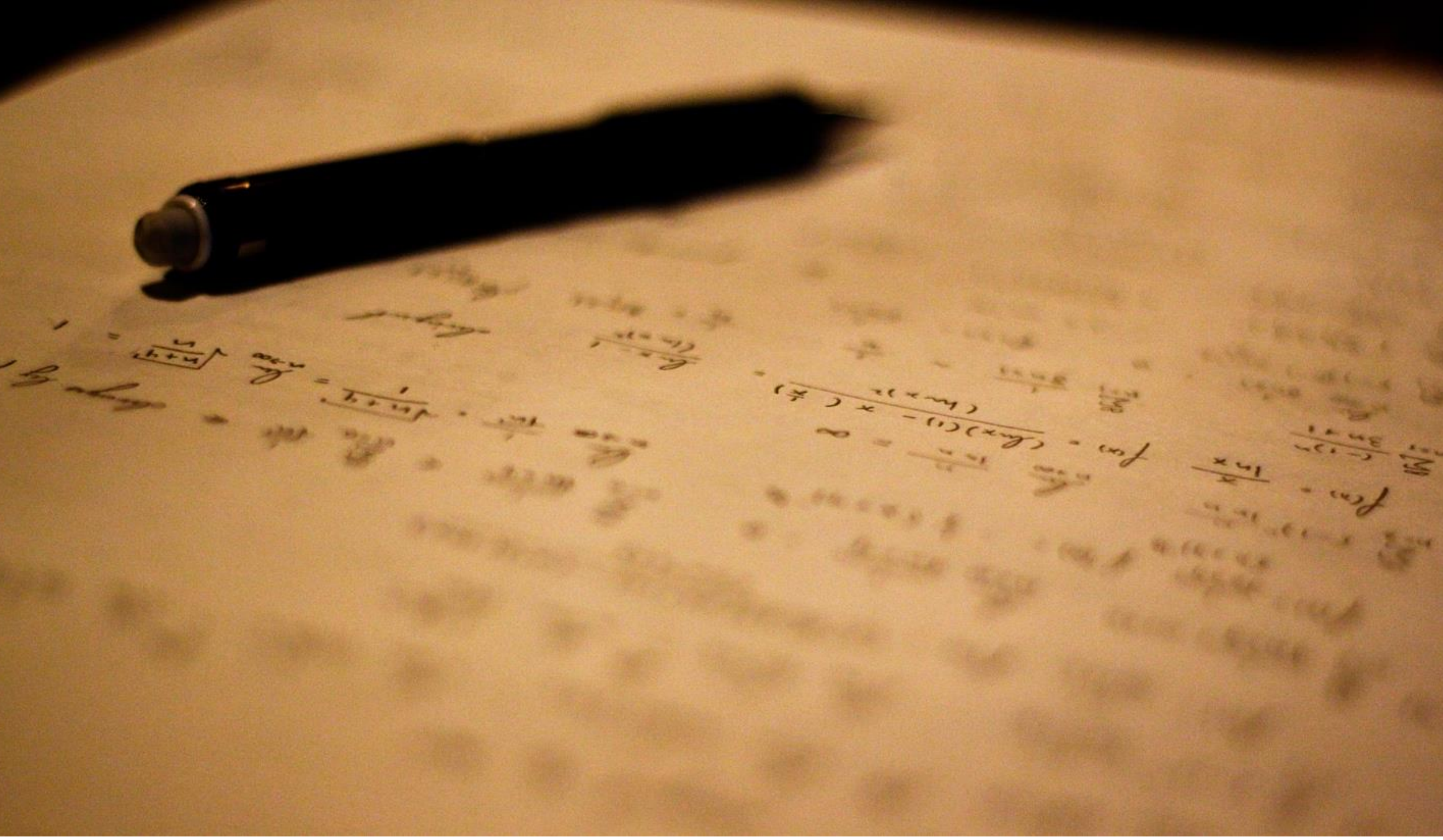
CÁLCULO INTEGRAL

Unidad 1 Integrales



Uptc
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
FESAD
Departamento de Innovación Académica

Contenido



INTEGRALES

Introducción

El cálculo tiene una cadena de conocimientos previos necesarios para dar continuidad a cada temática que procede en el desarrollo de una unidad, lo anterior necesario a la hora de contextualizar conceptos únicos y básicos de los temas en desarrollo.

Se sabe que hablar de derivada es encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente a una función, y ésta es aplicada en el movimiento (velocidad en física), es decir, dada una curva, calcular su pendiente; o, dado el recorrido de un móvil, calcular su velocidad; integral se relaciona en geometría con el concepto de área; entonces dada una función se busca el área comprendida bajo la curva; en esta unidad se pretende especificar el concepto de la integral indefinida, partiendo del concepto de la derivada de una función; ya que la integración de funciones trata de encontrar una fuerza variable, se calcula el trabajo realizado por dicha fuerza (González, 2016)*.*

Conocimientos previos requeridos

El estudiante debe estar en capacidad de usar, manejar y aplicar en el contexto los temas que se describen a continuación:

- Fundamentos matemáticos (manejo de los R)
- Expresiones algebraicas
- Casos de factorización
- Funciones (lineales, cuadráticas, racionales, etc.)
- Geometría básica (área, volumen, perímetro, plano cartesiano)
- Límites (cuando tienden al infinito, a cero y a cualquier número R dado)
- Derivadas

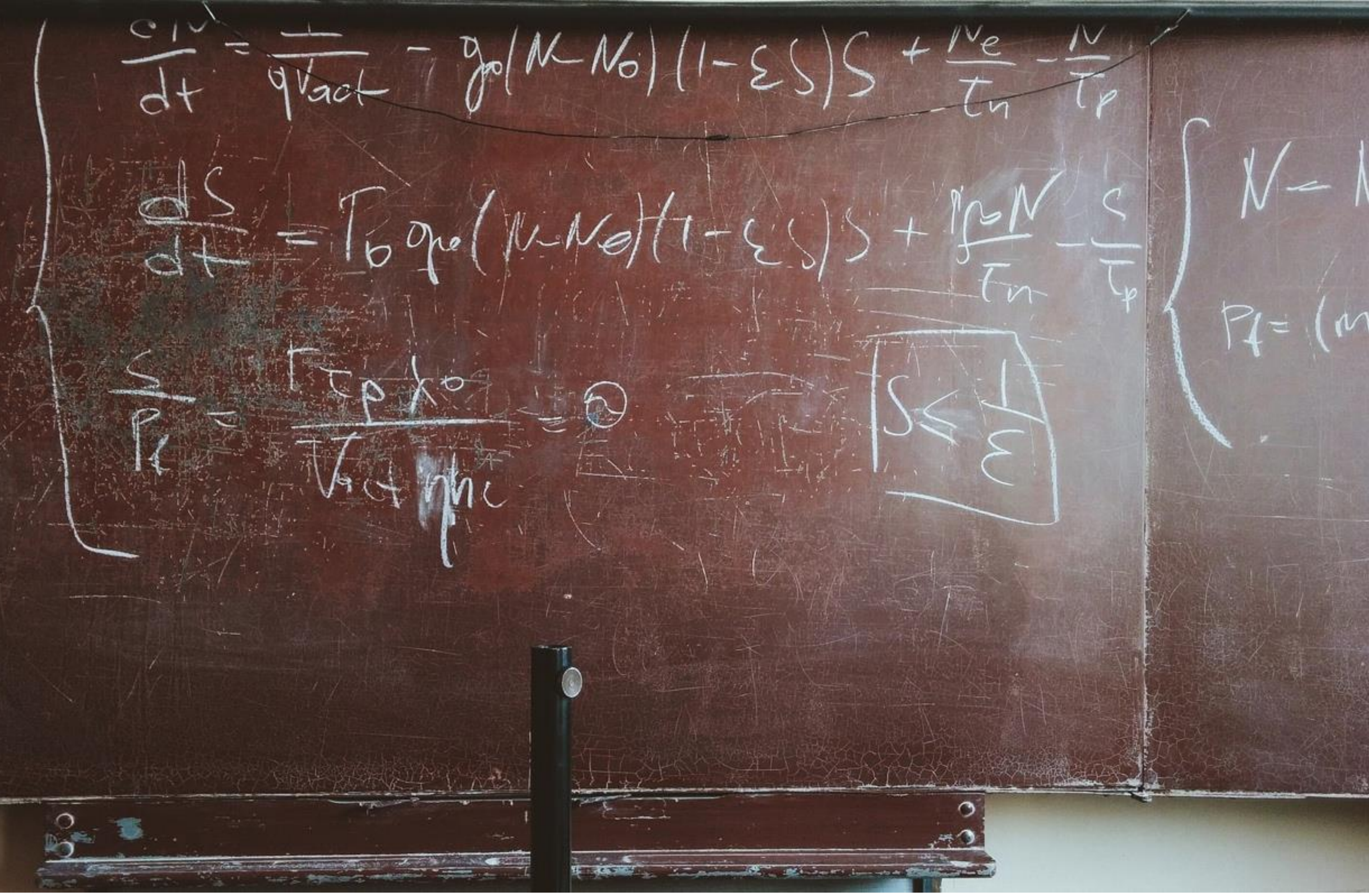
Competencias

Al finalizar esta unidad, el estudiante debería estar en capacidad de:

- Identificar la historia y objetivo del cálculo integral, para asociar símbolos, significados y conceptos.

- Interpretar definiciones y teoremas utilizados en el cálculo integral para comprender el uso y la aplicación que se requiere en el contexto.

- Manejar de manera apropiada las integrales indefinidas, y hacer uso de teoremas fundamentados para el desarrollo de las mismas.



1. HISTORIA Y OBJETO DEL CÁLCULO INTEGRAL

El cálculo integral, basado en el cálculo infinitesimal, hace parte de las matemáticas, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución en el proceso de integración o antiderivación.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos (Finney, 1987).

La integración es un concepto fundamental de las matemáticas avanzadas, especialmente en los campos del cálculo y del análisis matemático. Una integral es considerada como la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños. Según se establece la historia así (Morales, s. f.).

1.1 Integración antes del Cálculo

La integración se puede trazar en el pasado hasta el antiguo Egipto*, cerca 1800 a. C., con el papiro de Moscú, donde se demuestra que ya se conocía una fórmula para calcular el volumen de un tronco piramidal. La primera técnica sistemática documentada capaz de determinar integrales es el método de exhausción de Eudoxo (Circa 370 a. C.), que trataba de encontrar áreas y volúmenes a base de partirlos en un número infinito de formas para las cuales se conocieran el área o el volumen. Este método fue desarrollado y usado más adelante por Arquímedes, que lo empleó para calcular áreas de parábolas y una aproximación al área del círculo. Según* (De Burgos, 2007)*, métodos similares fueron desarrollados de forma independiente en China alrededor del siglo III por Liu Hui, que los usó para encontrar el área del círculo. Más tarde, Zu Chongzhi usó este método para encontrar el volumen de una esfera. En el Siddhanta Shiromani, un libro de astronomía del siglo XII del matemático indio Bhaskara II, se encuentran algunas ideas de cálculo integral.*

Hasta el siglo XVI no empezaron a aparecer adelantos significativos sobre el método de exhausción. En esta época, por un lado, con el trabajo de Cavalieri con su método de los indivisibles y, por otro lado, con los trabajos de Fermat, se empezó a desarrollar los fundamentos del cálculo moderno. A comienzos del siglo XVII, se produjeron nuevos adelantos con las aportaciones de Barrow y Torricelli, que presentaron los primeros indicios de una conexión entre la integración y la derivación.

1.2 Principales aportes de Newton y Leibniz

Los adelantos en integración vinieron en el siglo XVII con la formulación del teorema fundamental del cálculo, realizado de manera independiente por Newton y Leibniz. El teorema demuestra una conexión entre la integración y la derivación. Esta conexión, combinada con la facilidad, comparativamente hablando, del cálculo de derivadas, se puede usar para calcular integrales. En particular, el teorema fundamental del cálculo permite resolver una clase más amplia de problemas. También cabe destacar todo el marco estructural alrededor de las matemáticas, que desarrollaron también Newton y Leibniz. El llamado cálculo infinitesimal permitió analizar, de forma precisa, funciones con dominios continuos. Posteriormente, este marco ha evolucionado hacia el cálculo moderno, cuya notación para las integrales procede directamente del trabajo de Leibniz.

1.3 Formalización de las Integrales

Aunque Newton y Leibniz suministraron un enfoque sistemático a la integración, su trabajo carecía de un cierto nivel de rigor. Es memorable el ataque del obispo Berkeley calificando los infinitesimales como los "fantasmas de las cantidades que se desvanecen". El cálculo adquirió una posición más firme con el desarrollo de los límites y, en la primera mitad del siglo XIX, recibió una fundamentación adecuada por parte de Cauchy. La integración fue rigurosamente formalizada por primera vez por Riemann, empleando límites. A pesar de que todas las funciones continuas fragmentadas y acotadas son integrables en un intervalo acotado, más tarde se consideraron funciones más generales para las cuales no se aplica la definición de Riemann, y Lebesgue formuló una definición diferente de la integral basada en la teoría de la medida. También se propusieron otras definiciones de integral, que amplían las definiciones de Riemann y Lebesgue.

1.4 Notación

Isaac Newton usaba una pequeña barra vertical encima de una variable para indicar integración, o ponía la variable dentro de una caja. La barra vertical se confundía fácilmente con $\dot{x}$ o x', que Newton usaba para indicar la derivación, y además la notación "caja" era difícil de reproducir por los impresores; por ello, estas notaciones no fueron ampliamente adoptadas.

La notación moderna de las integrales indefinidas fue presentada por *Gottfried Leibniz* en *1675*. Para indicar summa (en *latín*, "suma" o "total"), adaptó el símbolo integral, "∫", a partir de una *letra S alargada*. La notación moderna de la integral definida, con los límites arriba y abajo del signo integral, la usó por primera vez *Joseph Fourier* en Mémoires de la Academia Francesa, alrededor de 1819–20, reimpresa en su libro de 1822. En la *notación matemática en árabe moderno*, que se escribe de derecha a izquierda, se usa un signo integral invertido (ﻻ) (Cálculo-Integral, 2015).

2. ANTIDERIVACIÓN

2.1 La Antiderivada

Hallar la antiderivada de una función *f* (*x*), consiste en encontrar otra función, digamos $g(x)$ tal que:

$$g'\,(x) \;=\; f\,(x)$$

Así $g(x)$ es una antiderivada de *f* (x). Para identificar una función a partir de su derivada, se debe hacer uso de una técnica de todas las funciones posibles, donde *f* (x) es su derivada; a dichas funciones se les llama **antiderivada** de *f* (x), proceso anterior llamado **integración.**

Ejemplo 1:
Sea $f(x) = 2x$, ¿cual será una función $g(x)$ cuya derivada es $2x$? Entonces tenemos, $g\ (\mathrm{x})\ =\ x^2$ Si derivamos obtenemos $f(x)\ =\ 2x$.
Sea $f(x)\ =\ cos(x)$, ¿cuál será un $g(x)$? Se busca una función cuya derivada es $cos(x)$, la cual es $sen(x)$. Tenemos entonces $g(x)\ =\ sen(x)$.

2.2 Notación de Antiderivada

Después de muchas propuestas, la establecida o más usada universalmente es:

$$\int f(x)\,dx$$

Aporte del matemático Leibniz.

Para los ejemplos anteriores con la notación de Leibniz se tiene:

- $\int (2x)dx\ =\ x2\ +\ \boldsymbol{c}$
- $\int cos(x)dx\ =\ sen(x)\ +\ \boldsymbol{c}$

Definiendo concepto de la $\underline{\boldsymbol{c}}$ como se observa en la notación de Leibniz

Definición 1:

Una función g(x) es una antiderivada de la función f(x),
si: g'(x) = f(x), para todo x en el dominio de f(x).

El conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ se le llama la **integral indefinida** de: $f(x)$ y se puede escribir: $\int\ f\ (x)dx\ =\ g(x)\ +\ c$

Teorema 1:

Sean $f(x)\, y\, g(x)$ antiderivadas de $f(x)$ en un intervalo cerrado I, entonces:

$g(x) = f(x) + c$, para alguna constante c.

Demostración:

Como $G(x)\ y\ F(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces tenemos que:

$$G'(x) = F'(x)$$

Por definición 1: si $g'(x) = f'(x)$ entonces: $g(x) = f(x) + c$ para todo x en el intervalo I abierto.

Por consiguiente: $G(x) = F(x) + c$, para alguna constante c.

Ejemplo 3:
Encontrar todas las funciones cuya derivada es $f(x) = 4x^3 + 2$. Solución: Una función puede ser $x^4 + 2x + 5$, porque la derivarla es $4x^3 + 2$. Por tanto Si $f(x) = 4x^3 + 2$, Entonces $g(x) = x^4 + 2x + 5$, También puede ser $g(x) = x^4 + 2x + 12$. En general cualquier función de la forma $g(x) = x^4 + 2x + C$, es antiderivada de la función $f(x)$, siendo C una constante.
Identifique la forma de las funciones cuya derivada corresponde a: $$f(x) = sec^2(x)$$

Solución:

La función es $g(x) = tan(x) + c$

Hallar algunas funciones cuya derivada es

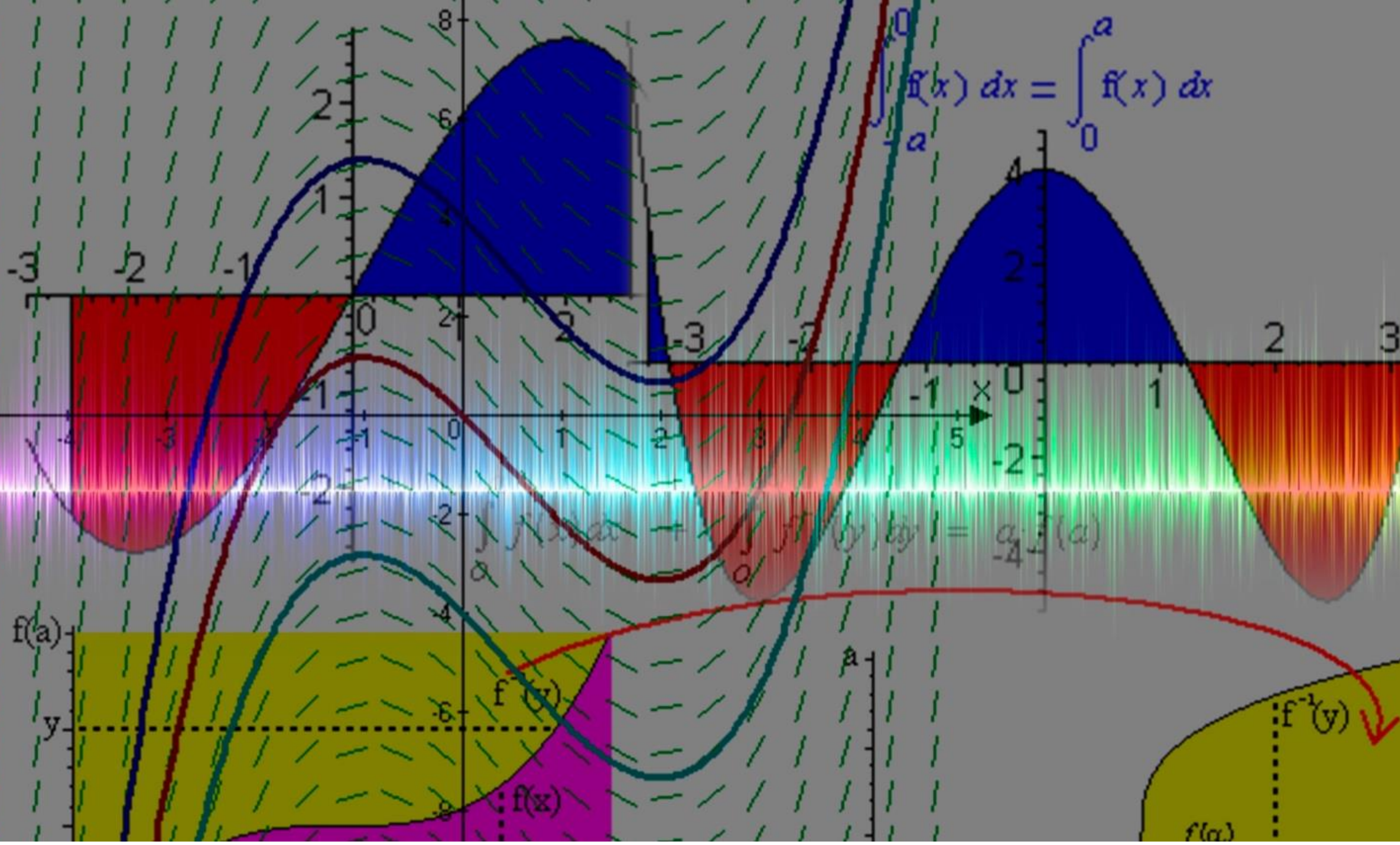
$$f(x) = 12$$

Solución:

Cualquier función de la forma $g(x) = 12x + C$, es antiderivada de $f(x)$, pueden ser:

$g(x) = 12x + 5$, $G(x) = 12x + 10$,

$g(x) = 12x + 25$



3 LA INTEGRAL INDEFINIDA

3.1 Integral Indefinida

Dado el concepto de antiderivada, se puede establecer el significado de la integral indefinida. Teniendo en cuenta que *Leibniz* (1646-1716) a la antiderivada la llamó **integral indefinida** incluyendo a c como constante, como se vio anteriormente.

Definición 2:

$$\int f\,(x)dx = g(x) + c$$

Donde:

$\int$ Símbolo de integración	
$\boldsymbol{f(x)}$ = integrando	$\boldsymbol{g(x)}$ = La integral de f(x)
$\boldsymbol{dx}$ = diferencial de la variable	$\boldsymbol{c}$ = constante de integración

Por definición de derivada tenemos:

$$\frac{dy}{dx}[g(x)] = f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x)dx$$

La operación opuesta

$$\frac{d(g(x))}{dx} = f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x)dx$$

$$\int d(g(x)) = \int f(x)dx \Rightarrow g(x) = \int f(x)dx + c$$

3.2 Propiedades de las integrales

En las matemáticas se establecen propiedades para cada temática con el fin de aplicar adecuadamente el concepto. En las integrales se establecen las propiedades que se mencionan a continuación.

1. **Factorizar el signo:**

   El signo menos en la función f(x) afecta a toda la función y por tanto tomarla como factor antes de la integral ayuda a manejar de mejor manera los términos que la componen.

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

2. **Factor común o termino coeficiente:**

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Ejemplo 4:

Haciendo uso de la propiedad 1 y 2

$$\int -\frac{10}{3}dx$$

El coeficiente el signo queda como factor de la integral

$$= -\frac{10}{3}\int dx$$

Se soluciona la integral inmediata

$$= -\frac{10}{3}x + c$$

3. **Integral de una constante:**

$$\int kdx = kx + c$$

Ejemplo 5:

Haciendo uso de la propiedad 3

$$\int 5e^{2x}\,dx = 5\int e^{2x}\,dx = 5/2\ e^{2x} + c$$

4. **Suma o diferencia de integrales:**

$$\int [kf(x) \pm kg(x)]dx = \int kf(x)\,dx \pm \int kg(x)\,dx$$

Ejemplo 6:

Haciendo uso de la propiedad 3 y 4

$$\int (3x^2 + 4x^3 - 2\,sen(x))dx$$

$$= \int 3x^2\,dx + \int 4x^3 dx - \int 2\,sen(x)\,dx$$

$$= \int 3x^2\,dx + \int 4x^3\,dx - \int 2\,sen(x)dx$$

hacienda uso de la propiedad 2

$$= 3\int x^2\,dx + 4\int x^3\,dx - 2\int sen(x)dx$$

Desarrollando integrales inmediatas

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^4}{4} + 2\,cos(\,x\,) + c$$

Simplificando $= x\,3 + x\,4 + 2\,cos(\,x\,) + c$

5. Integral racional con la derivada del denominador como numerador:

$$\int \frac{f'(\,x)}{f(x)}\,dx = Ln\,f\,(\,x) + c$$

Ejemplo 7:

Haciendo uso de la propiedad 5:

$$\int \frac{6x}{3x^2+4}\,dx = Ln|3x^2+4| + c$$

6. Integral del producto de una función con su derivada

$$\int [\,f\,(x)]p\,f\,'(x)dx = [\,f\,(x)]p + 1\,/\,p + 1$$

Ejemplo 8:

Haciendo uso de la propiedad6:

$$\int \left(5x^2 - sen\,(2\,x)\right)^4 (10\,x - 2\cos(\,2\,x))dx$$

$$= \frac{1}{5}(5\,x\,2 - sen\,(2\,x\,)\,)5 + c$$

3.3 Integrales Inmediatas

En la siguiente tabla se encuentran las integrales y fórmulas de las que se hace uso para solucionar algunos ejercicios propuestos.

Tabla 1: Integrales Inmediatas

$\int a \cdot dx = nx + c$, con $(a \neq 0)$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, con $(n \neq -1)$	$\int \frac{f´(x)}{f(x)} dx = \ln \mid f(x) \mid + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int sen\ f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + C$
$\int senxdx = -cos\ x + C$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = sen\ f(x) + C$
$\int cos\ xdx = senx + C$	$\int \sec^2 f(x) \cdot f'(x)dx = tg\ f(x) + C$
$\int sec^2\ xdx = tgx + C$	$\int \frac{f(x)}{1+[f(x)]^2} dx = arctg\ f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsen\ f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + C$	

Fuente: elaboración propia.

BIBLIOGRAFÍA

Aranda, P. (2009). *Apuntes de Cálculo I*. Recuperado el 22 de 03 de 2017, de http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda/Calpdf/calculo1/ci-pp.pdf

Baum, A. M., Milles, S. J., & Schultz, H. J. (1992). Cálculo aplicado. México.

***Cálculo-Integral.* (2015).** Obtenido de http://elcaculodenuestratierra.blogspot.com.co/2015/02/calculo-integral.html

Chiavenato, I. (1999). *Introducción a la teoría general de la administración.* Bogotá D.C.: McGrawn-Hill.

De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable.* Madrid: McGraw-Hill.

Dumrauf, G. L. (2013). *Finanzas corporativas.* Buenos Aires: Alfaomega.

Emery, D., & Finnerty, J. (2000). *Administración financiera corporativa.* México: Pearson.

finanzasbrv.blogspot. (s.f.). *finanzasbrv.blogspot*. Recuperado el 16 de 03 de 2015, de http://finanzasbrv.blogspot.com/p/el-capital-de-trabajo.html

Finney, T. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Addison Wesley Iberoamericana.

Gitman, L. J. (2012). *Principios de administración financiera.* México: Pearson.

González, F. J. (2016). *http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf.* Recuperado el 04 de 05 de 2017, de http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Granville, W. A. (1980). integración de formas elementales. En: W. A. Granville, *Cálculo diferencial e integral.* (p. 686). Limusa.

Morales, R. G. (s. f.). *Antecedentes históricos del cálculo integral*. Recuperado el 27 de abril de 2017, de https://es.scribd.com/doc/74346342/Antecedentes-Historicos-Del-Calculo-Integral

Rosenberg, J. M. (2016). *Dicionario de administración y finanzas.* Barcelona: Oceano.

Ross, S., Westerfield, R., & Jordan, B. (2001). *Fundamentos de finanzas corporativas.* México: McGraw-Hill.

Autor / compilador: Erika Geraldine Pérez Lemus

Equipo de Producción: Comité de gestión y calidad FESAD
Departamento de Innovación Académica

Versión 1.0 – septiembre de 2017

CALCULO INTEGRAL

Unidad 2

Integral Definida

Uptc Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

FESAD

Departamento de Innovación Académica

Contenido

INTRODUCCIÓN

Las integrales definidas se evidencian a la hora de formar limites o intervalos en donde se deben analizar conceptos de áreas bajo la curva representados en la unidad anterior, haciendo uso del plano cartesiano y las derivadas como medio principal al establecer las maneras de encontrar las características que se deben reconocer.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Conocimientos previos requeridos

El estudiante debe estar en capacidad de usar, manejar y aplicar en el contexto los temas que se describen a continuación.

- Sumatorias
- Series y sucesiones
- Derivadas
- Integrales indefinidas

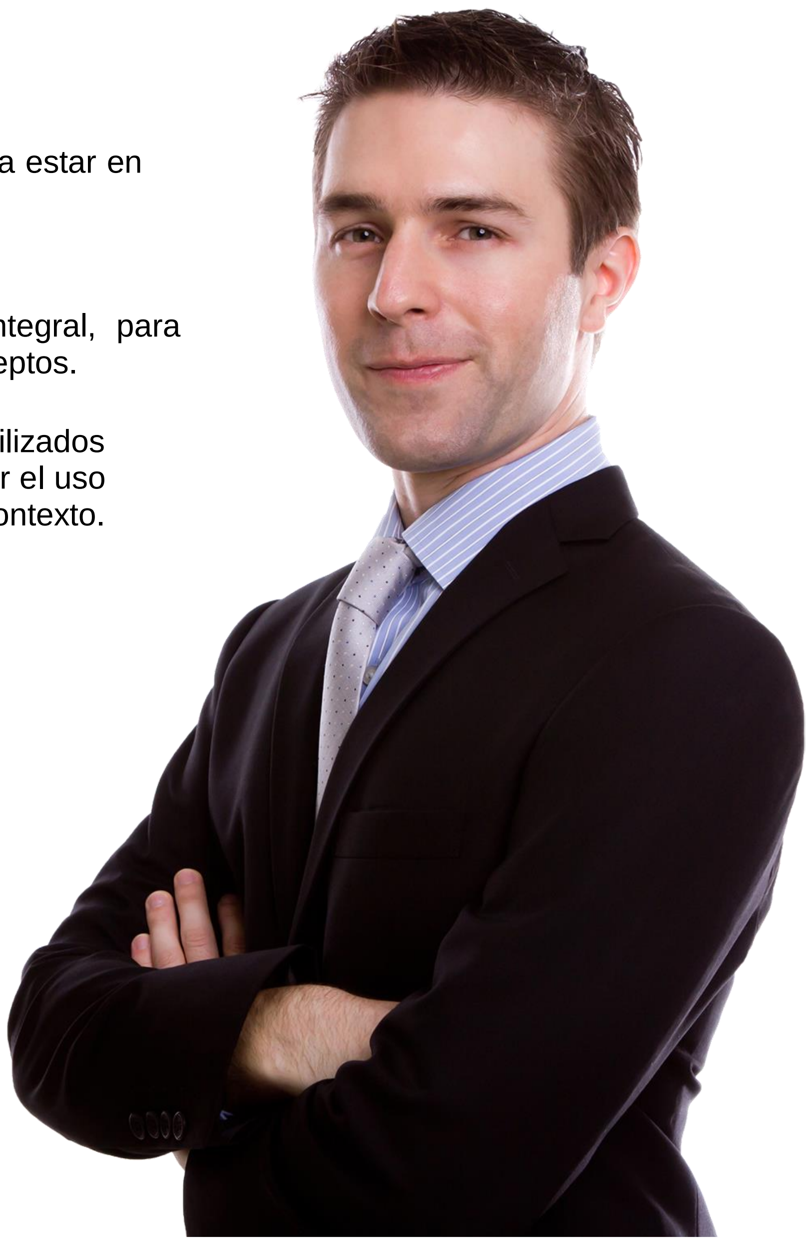
Competencias

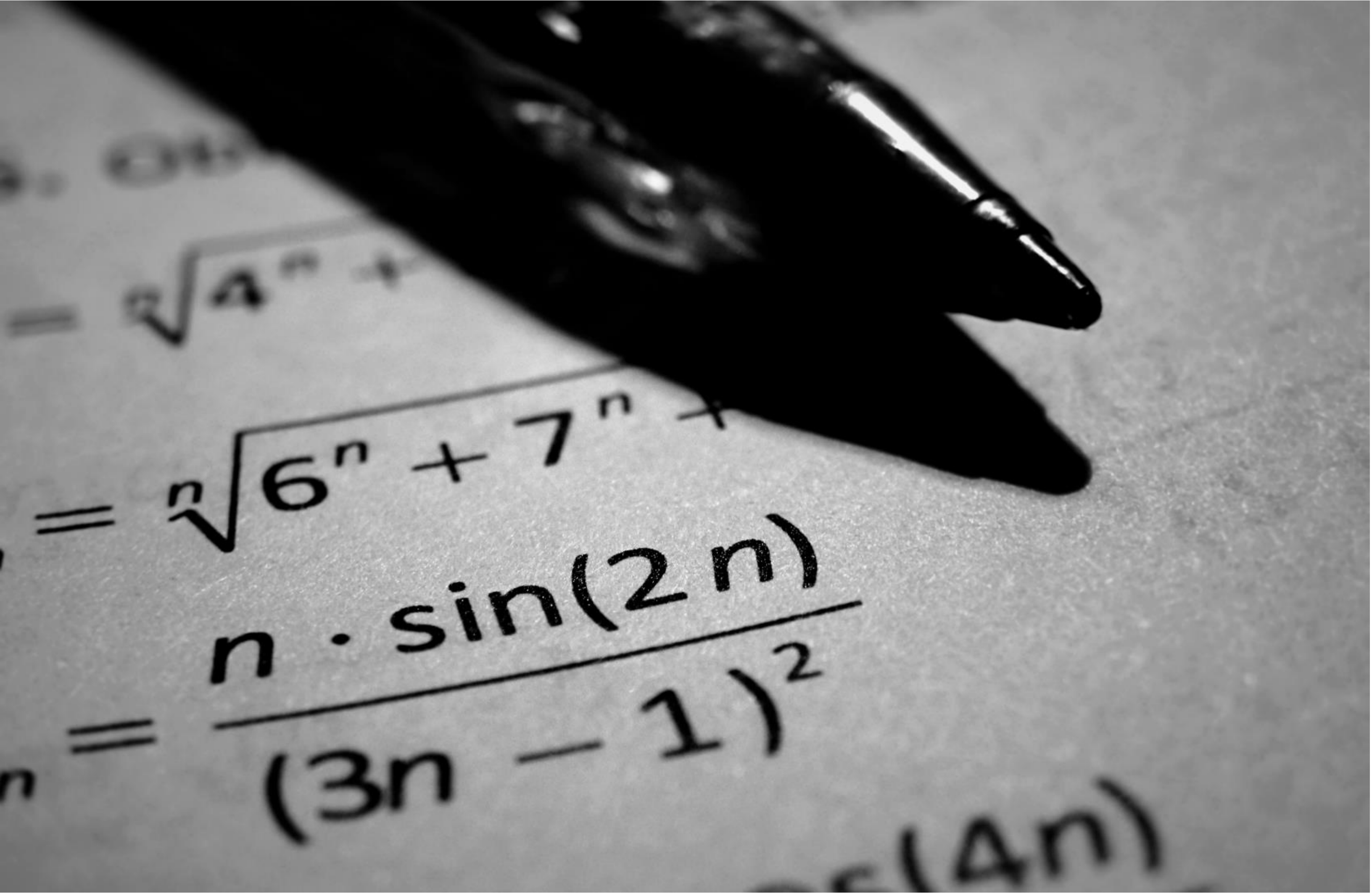
Al finalizar esta unidad, el estudiante debería estar en capacidad de:

- Identificar las propiedades de la integral, para asociar símbolos, significados y conceptos.

- Interpretar definiciones y teoremas utilizados en el cálculo integral para comprender el uso y la aplicación que se requiere en el contexto.

- Manejar de manera apropiada las integrales definidas, y hacer uso de teoremas fundamentados para el desarrollo de las mismas.





1. TECNICAS DE INTEGRACIÓN

1.1 Integrales por Sustitución o Cambio De Variable

Esta técnica consiste en sustituir el integrando o parte de éste por otra función para que la expresión resultante sea más fácil de integrar. Además, realizando el cambio de variable en el integrando se tendrá una función multiplicada por su derivada y la integral será inmediata. En el caso de las integrales definidas, al aplicar el cambio hay que actualizar los extremos de la integral.

Al **integrar por sustitución o hacer un cambio de variable** se debe identificar la derivada de la función compuesta.

$$\int f'(x).x\,dx = f(x) + c$$

Para **cambiar de variable** identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva **variable u**, de modo que se obtenga una **integral** más sencilla.

1.1.1 Pasos para integrar por cambio de variable

$$\int f'(x).xdx$$

- Se hace el **cambio de variable** y se diferencia en los dos términos:

$u = x \qquad du = x\,dx$

- Se despeja dx

$du/x = dx$

- se sustituyen en la integral los valores obtenidos de u y dx:

$$\int f'(u).x\,\frac{du}{x} \xrightarrow{\text{Simplificado}} \int f'(u).du$$

- se integra la función resultante:

$$\int f'(u).du = f(u) + c$$

- Se cambia de nuevo la variable $u = x$:

$$f(u) + c = f(x) + c$$

Ejemplo 1: Desarrolle la siguiente integral

$$\int x\,(x^2+1)^3 dx$$

- Se identifica la función *u y se deriva, además se despeja dx*

$u = \ (x^2+1)$ $\quad du = \ 2x\,dx$ $\quad \frac{du}{2x} \ = \ dx$

- Se reemplaza u y dx en la integral definida.

$$\int x\ u^3 \frac{du}{2x} \ = \ \frac{1}{2}\int u^3\ du \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int u^3\ du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^4}{4}\right) + c$$

- Se integra la función obtenida

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u^4}{4}\right) + c \ = \ \frac{1}{8}\,u^4 + c$$

- Se reemplaza el valor de *u en el resultado*

$$\frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$$

Ejemplo 2:

$$\int \cos x(5+\operatorname{sen} x)^5$$

- Se identifica la función *u y se deriva, además se despeja dx*

U= 5+ sen x $\quad du = \ cos\ x\ dx \quad \frac{du}{cosx}\ =\ dx$

- Se reemplaza u y dx en la integral definida.

$$\int cosx\ u^5 \frac{du}{cosx}\ =\ \int u^5\ du \quad \rightarrow \quad \int u^5\ du = \left(\frac{u^6}{6}\right) + c$$

- Se integra la función obtenida

$$\left(\frac{u^6}{6}\right) + c\ =\ \frac{1}{6}\, u^6 + c$$

- Se reemplaza el valor de *u en el resultado*

$$\frac{1}{6}(5+\ \operatorname{sen} x\,)^6 + c$$

1.1.2 Ejercicios propuestos:

Tabla 1: Integrales para resolver por sustitución

En los siguientes ejercicios realice la integral que se indica:		
1. $\int \sqrt{1-4y}dy$	2. $\int x^2(x^3-1)^{10}dx$	3. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}dx$
4. $\int x\sqrt{x+2}dx$	5. $\int \sqrt{3-2x}x^2dx$	6. $\int \cos 4\theta d\theta$
7. $\int \frac{1}{2}t\ sin\ 4t^2dt$	8. $\int \cos x(2+\sin x)^5dx$	9. $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\frac{dx}{x^2}$
10. $\int 2\sin x^3\sqrt{1+\cos x}dx$	11. $\int sen^3\ \theta cos\theta d\theta$	12. $\int \frac{sec^2\ 3\sqrt{t}dt}{\sqrt{t}}$
13. $\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}}$	14. $\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-2x^2}}$	15. $\int \tan x dx$

Fuente: Adaptado de (Matesap, 2017)

1.2 Integrales por Partes

Esta técnica permite resolver integrales que tengan con función interna un producto de funciones así:

$$\int f(x).g(x)\ dx = f(x).g(x) - \int f(x).g(x)\ dx$$

1.2.1 Condiciones para Realizar Integrales por Partes

Al **integrar por partes se debe aplicar una sustitución de términos los cuales son llamados *u* y *v*, estos** son escogidos así:

i. Las funciones como logaritmos, Funciones inversas y polinomios se eligen como ***u***.

Ejemplo:

- Logaritmos: Log_n x, Ln x
- Función inversa o "arcos":
  $\mathrm{Sen}^{-1}x$= arcosen x
  $\mathrm{Cos}^{-1}x$=arcocosx
  $\mathrm{Tan}^{-1}x$= arcotanx
- Polinomios: x, x^2, (x+3); etc.

ii. Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como ***v***.

- Exponenciales: a^x, e^x

- Trigonométricas: Sen x, Cos x Tan x

Se tiene entonces la integral definida así:

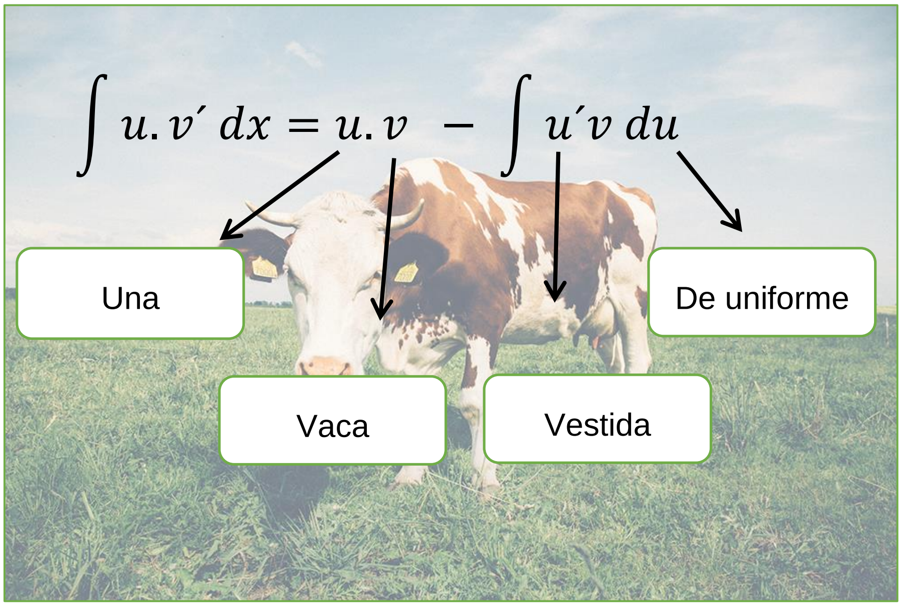
$$\int f(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int u.v'\,dx = u.v - \int u'v\,du$$

Conocida en con jerga común por el dicho que se observa en la siguiente imagen.

Figura 1: Frase didáctica de integral por partes



Fuente: (PEXELS, s.f.)

Ejemplo 1: Desarrolle la siguiente integral

$$\int x \cos x \, dx$$

- Se identifica la función: - *u y se deriva*

  - *v´ y se integra*

$u = x$	*Se deriva*	$du = 1\,dx$
$v' = \cos x$	*Se integra*	$v = \operatorname{sen} x$

- Se reemplazan los términos igualándolo a la integral dada

$$\int x \cos x \, dx = x \, . \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx$$

- Se integra la función obtenida

$$x. \operatorname{sen} x - (-\cos x) + c$$

- Se iguala la integral al resultado

$$\int x \cos x \, dx = x. \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + c$$

Ejemplo 2: Desarrollar la siguiente integral por partes

Este proceso es llamado "Bucle"

$$\int \mathrm{x}^3 \mathrm{e}^\mathrm{x} \mathrm{dx}$$

- Se identifica la función: - *u y se deriva*

  - *v´ y se integra*

$u = x^3$	*Se deriva*	$du = 3x^2 \, dx$
$v' = e^x$	*Se integra*	$v = e^x$

- Se reemplazan los términos igualándolo a la integral dada

$$\int x^3 e^x = x^3 e^x - \int e^x \, 3x^2 \, dx$$

- Se integra la función obtenida

$$x^3e^x \; - 3\int e^x x^2 \, dx$$

- Como la derivada sigue siendo un producto se identifica en la función:

  - u y se deriva

  - v´ y se integra

$u = \; x^2$ *Se deriva* $du = \; 2x \, dx$

$v' = \; e^x$ *Se integra* $v = \; e^x$

- Se reemplazan los términos igualándolo a la integral dada

$$\int x^3e^x = x^3e^x \; - 3\left(x^2e^x - 2\int e^x \, x \, dx\right)$$

- Se integra la función obtenida

$$\int x^3e^x = x^3e^x \; - 3x^2e^x + 6\int e^x \, x \, dx$$

- Como la derivada sigue siendo un producto se identifica en la función: *- u y se deriva*

  - v´ y se integra

$u = x$ *Se deriva* $du = \; dx$

$v' = \; e^x$ *Se integra* $v = \; e^x$

- reemplazan los términos igualándolo a la integral dada

$$\int x^3e^x = x^3e^x \ - 3x^2e^x + 6\left(e^x x - \int e^x \ dx\right)$$

- Se debe integrar tantas veces sea necesario hasta que la integral obtenida sea inmediata

$$\int x^3e^x = x^3e^x \ - 3x^2e^x + 6\left(e^x x - \int e^x \ dx\right)$$

- Finalmente se obtiene una integral inmediata y se da el resultado, siempre igualado a la integral principal.

$$\int x^3e^x = x^3e^x \ - 3x^2e^x + 6e^x x - 6e^x + c$$

$$\int x^3e^x = e^x \ (\ x^3 \ - 3x^2 + 6x - 6\ ) + c$$

Ejemplo 3: Desarrollar la integral

Proceso de desarrollo cuando se tiene un logaritmo o un arco

$$\int arccot\, x\, dx$$

- Se identifica la función: - *u y se deriva*

  - v´ y se integra

$u = \ arcotx$	*Se deriva*	$du = -\frac{1}{1+x^2}$
$v´ = 1$	*Se integra*	$v = x$

- Se reemplazan los términos igualándolo a la integral dad

$$\int x\,cosx\,dx = (arccotx).x - \int x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\ dx$$

- Se integra la función obtenida

$$x.(arccotx) + \int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

$x.(arccotx) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

- Se iguala la integral al resultado

$\int x\,cosx\,dx = x.(arccotx) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Ejemplo 4: Desarrollar la siguiente integral

Proceso de desarrollo si al integrar por partes la integral resultante es igual a la integral inicial.

$$\int e^{3x} sen\ 2x\,dx$$

- Se identifica la función: - *u y se deriva*

  - *v´ y se integra*

$u = e^{3x}$ *Se deriva* $du = 3e^{3x}$ dx

$v´ = sen\ 2x$ *Se integra* $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

- Se reemplazan los términos igualándolo a la integral dada

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)(3e^{3x})\ \mathrm{dx} + \mathrm{c}$$

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{3}{2}\int (\cos 2x)(e^{3x})\ \mathrm{dx} \quad + c$$

- Se integra la función obtenida, de nuevo por partes ya que se tiene un producto:

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{3}{2}\int (\cos 2x)(e^{3x})\ \mathrm{dx} + \mathrm{c}$$

$u = e^{3x}$ *Se deriva* $du = 3e^{3x}$ dx

$v´ = cos\ 2x$ *Se integra* $v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx = \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right) + \frac{3}{2}\left((e^{3x})\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)(3e^{3x})\ \mathrm{dx}\right) +$$

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx\ = \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{2}\left((e^{3x})\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)-\frac{3}{2}\int\ (\operatorname{sen} 2x)(e^{3x})\ \mathrm{dx}\ \right)+c$$

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx\ = \left(-\tfrac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\tfrac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)-$$
$$\tfrac{9}{4}\int\ (\operatorname{sen} 2x)(e^{3x})\ \mathrm{dx}\ \ +\mathrm{c}$$

- En este paso la integral resultante es igual a la integral principal, por tanto, se debe adicionar en las dos partes de la ecuación y se realizan las operaciones de los coeficientes.

$$\int e^{3x} sen\ 2x\, dx+\ \frac{9}{4}\int\ (\operatorname{sen} 2x)(e^{3x})\ \mathrm{dx}$$
$$=\ \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)+c$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(\int\ e^{3x} sen\ 2x\, dx\right)=\ \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)+c$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(\int\ e^{3x} sen\ 2x\, dx\right)=\ \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)+c$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(\int\ e^{3x} sen\ 2x\, dx\right)=\ \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)+c$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\left(\int\ e^{3x} sen\ 2x\, dx\right)=\ \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\ \left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right)+c$$

$$\left(\frac{13}{4}\right)\left(\int e^{3x} sen\ 2x\,dx\right) = \left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right) + \frac{3}{4}\left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right) + c$$

- Las dos partes de la ecuación se multiplican por $\frac{4}{13}$

$$\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{13}{4}\right)\left(\int e^{3x} sen\ 2x\,dx\right) = \left(\frac{4}{13}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x\right) + \frac{3}{4}\left((e^{3x})(\operatorname{sen} 2x)\right) + c$$

$$\left(\int e^{3x} sen\ 2x\,dx\right) = \left(\frac{1}{13}e^{3x}\right)(-2\cos 2x) + 3\left((\operatorname{sen} 2x)\right) + c$$

1.2.2 Ejercicios propuestos

Tabla 2: Integrales para resolver por partes

Ejercicios resueltos En los ejercicios siguientes efectúe la integral indefinida:		
1. $\int \ln xdn$	2. $\int xe^{3x}\,dx$	3. $\int cos\sqrt{xdx}$
4. $\int xe^{-x}\,dx$	5. $\int x\sec x\tan xdx$	6. $\int (\ln x)^2\ dx$
7. $\int x^2\ln xdx$	8. $\int e^x\cos xdx$	9. $\int cos^2\ xdx$
10. $\int 3x\cos 2xdx$	11. $\int (e^x + 2x)^2\,dx$	12. $\int x\ sen\ xdx$

Fuente: Adaptado de (Matesap, 2017)

2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

2.1 Sumas de Riemann

Comencemos por definir una función $f(x)$ *en el intervalo cerrado* $I = [a, b]$*, en dicho intervalo puede haber valores positivos y negativos; incluso, podría ser no continua. Hacemos una partición* ***P*** *del intervalo I en* ***n*** *subintervalos, para facilidad se hace una partición regular, pero no necesariamente debe ser regular, dicha partición debe tener la condición que:*

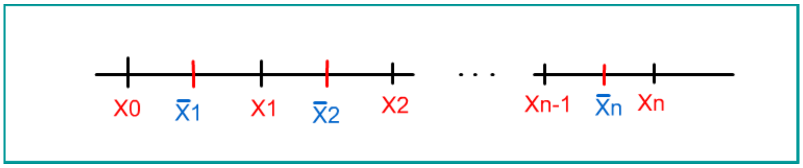
$$X_0 < X_1 < X_2 < \ldots < X_{n-1} < X_n, donde\ a = X_0\ y\ b = X_n$$

Ahora sea, $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$ *el tamaño del subintervalo.*

*En cada subintervalo se escoge un "**punto muestra**", puede ser un punto frontera* $\tilde{x}_i$

$\Delta X_1 = X_1 - X_0.$

$\Delta X_2 = X_2 - X_1$



Así para los demás intervalos.

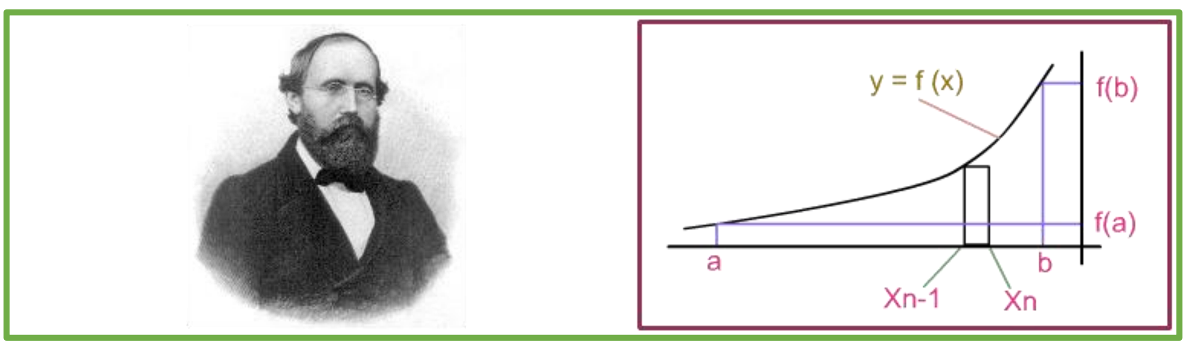
Como la partición se hizo sobre la función f(x), entonces:

Formula de Suma de Riemman:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f\,(\widetilde{xi})\,\Delta\, xi$$

Aquí R_p *es la suma de Riemman para* $f(x)$ *en la partición P.*

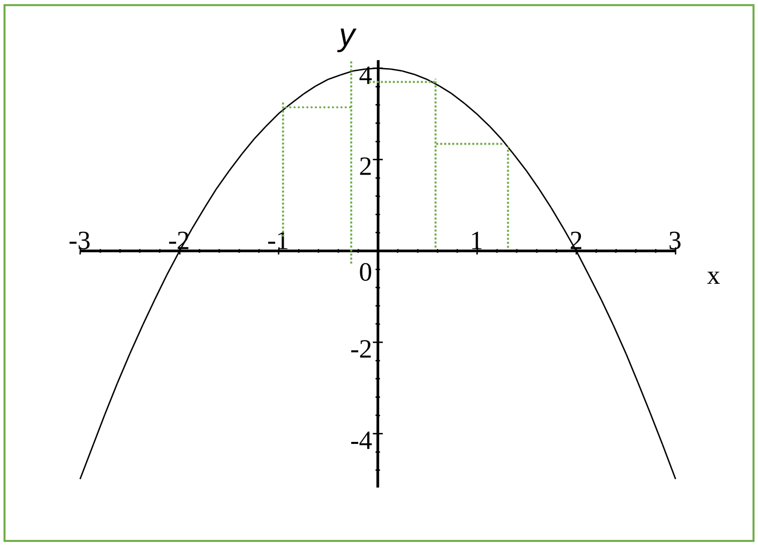
Figura 2: Polígonos circunscritos



Fuente: (Rondón, 2010).

Ejemplo 1: Sea la función f(x) = 4 – x^2 en el intervalo cerrado [-1, 2], con n =4.

- *Se gráfica la función y se divide el intervalo [-1, 2] en 4 subintervalos.*



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \Delta x = \frac{2-(-1)}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Delta x = \frac{3}{4}$$

- *Al sustituir los datos, se obtienen los siguientes resultados*:

$$x_1^* = x_0 + 1\Delta x = a + 1\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1+1\left(\frac{3}{4}\right) = -1+\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

- *Recuerda que el valor de x_0 = a = -1*

$$x_2^* = x_0 + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1+2\left(\frac{3}{4}\right) = -1+\frac{6}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_3^* = x_0 + 3\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right) = -1+3\left(\frac{3}{4}\right) = -1+\frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

- *Es importante revisar la sustitución de los valores, así como sus signos y realizar correctamente las operaciones. Por otra parte, el ultimo valor de x_k^* depende del valor de "n", en este caso n = 4, entonces x_k^* debe calcularse hasta el valor de n-1, en este ejercicio hasta x_3^*.*

Para obtener la altura de cada uno de los rectángulos $f(x_k^*)$, se sustituyen los valores de $x_1^*, x_2^* \text{ y } x_3^*$ en la función $f(x) = 4 - x^2$

$$f(x_1^*) = 4 - (x_1^*)^2 = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 4 - \frac{1}{16} = \frac{63}{16}$$ Recuerda que: $4 = \frac{64}{16}$

$$f(x_2^*) = 4 - (x_2^*)^2 = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = \frac{60}{16}$$

$$f(x_3^*) = 4 - (x_3^*)^2 = 4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 4 - \frac{25}{16} = \frac{39}{16}$$

- Se sustituyen los valores en la fórmula $A = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$

$$A = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x$$

$$A = \left(\frac{63}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{60}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{39}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$A = \frac{189}{64} + \frac{180}{64} + \frac{117}{64} = \frac{486}{64} = 7.59\,\mathrm{u}^2$$

Por lo tanto, el valor del área es: A = 7.59 u^2. (Contreras, 2003)

Ejemplo 2:

Evaluar la suma de Riemman para la función $f(x) = x^2 + 2$ *en el intervalo* $[-2, 2]$ *, la partición es regular, tomando P = 8*

Solución:

Tomemos $X_0 = -2$ *y* $Xn = 2,$ *Se toma intervalo* $\widetilde{X_I}$ *como el punto medio de i-ésimo intervalo.*

También $\Delta x_i = \frac{2-(-2)}{8} = \frac{1}{2}$ *entonces* Δx_i*=0,5; con esto se obtienen 8 Sub-intervalos, cuyos puntos medios son*

-1.75, -1.25, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25,1.75.

Aplicando la fórmula de sumas de Riemman:

$$R_p = \sum_{i=1}^{8} f(\widetilde{x_i})\, \Delta x_i$$

$$R_p = [f(-1.75) + f(-1.25) + f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)] * 0.5$$

En la función se reemplaza:

$$f\,(-1{,}75) = (-1{,}75)^2 + 2 = 5{,}0625$$

y así para cada valor.

$$R_p = [5.0625 + 3.5625 + 2.5625 + 2.0625 + 2.0625 + 2.5625 + 3.5625 + 5.0625] * 0.5$$

$$R_p = [25.50] * 0.5 = \mathbf{13.25}$$

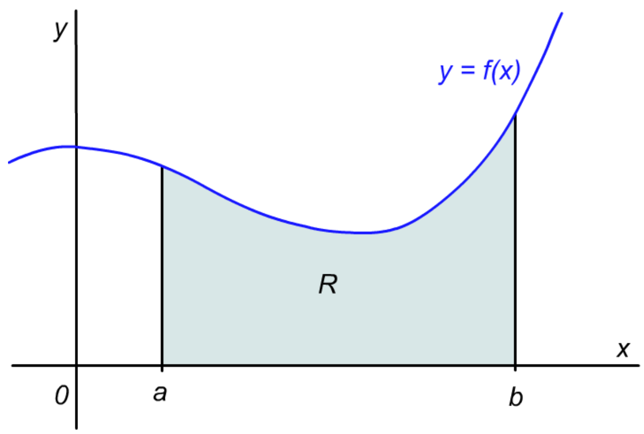
Tomado de: (Cálculo Integral, 2015)

Ejercicios propuestos

Solucione los siguientes ejercicios aplicando las sumas de Riemann y realice la gráfica.

- Sea $f(x) = 3x - 6$ en el intervalo cerrado [2, 4] con n = 4.
- Sea $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo cerrado [0, 1] con n = 4.
- Sea $f(x) = -2x + 4$ en el intervalo cerrado [0, 2] con n = 8.

2.2 Integral Definida



$$R = \acute{A}rea\ de\ f(x) = \int_a^b f(x)dx = Integral\ definida\ de\ f(x)\ en\ [a,b]$$ (Unican, 2004)

DEFINICIÓN 1:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + c$$

Dónde:

$\int$ Símbolo de integración.

$\boldsymbol{f(x)}$ = Integrando

$\boldsymbol{dx}$ = Diferencial de la variable

$\boldsymbol{a}$ = Extremo inferior

$\boldsymbol{b}$ = Extremo superior

$\boldsymbol{c}$ = Constante de integración.

$\boldsymbol{f(a)}$ = Integrando definido en el límite inferior

$\boldsymbol{f(b)}$ = Integrando definido en el límite superior

La integral definida expresada anteriormente se basa en una función f que se establece en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1: Evalué la siguiente integral

Haciendo uso de la propiedad 1 y 2

$$\int_1^2 -\frac{10}{3}\,dx$$

- El coeficiente el signo queda como factor de la integral

$$= -\frac{10}{3}\int_1^2 dx$$

- Se soluciona la integral inmediata

$$= -\frac{10}{3}x\Big|_1^2 + c$$

- Se evalúa la integral en cada uno de los limites

$$-\frac{10}{3}x\Big|_1^2 + c = -\left(\frac{10}{3}(2) - \frac{10}{3}(1)\right) + c$$

$$-\frac{10}{3}x\Big|_1^2 + c = -\left(\frac{20}{3} - \frac{10}{3}\right) + c$$

$$-\frac{10}{3}x\Big|_1^2 + c = -\left(\frac{10}{3}\right) + c$$

2.3 Propiedades de la Integral Definida

Propiedad 1: Si en los límites ocurre que $a > b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Propiedad 2: Si los límites son iguales entonces la integral de la función f es cero

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Propiedad 3: si en la función f es una constante k

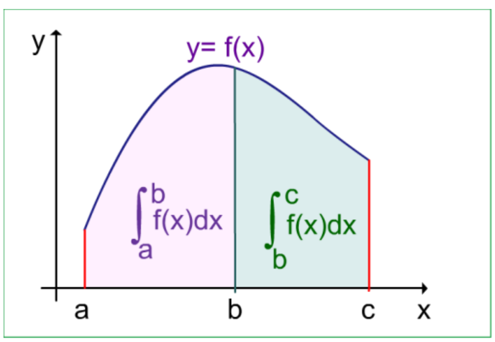
$$\int_a^b k\ dx = k(b-a)$$

Propiedad 4: si en la función f , tiene un coeficiente k

$$\int_a^b k.f(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$$

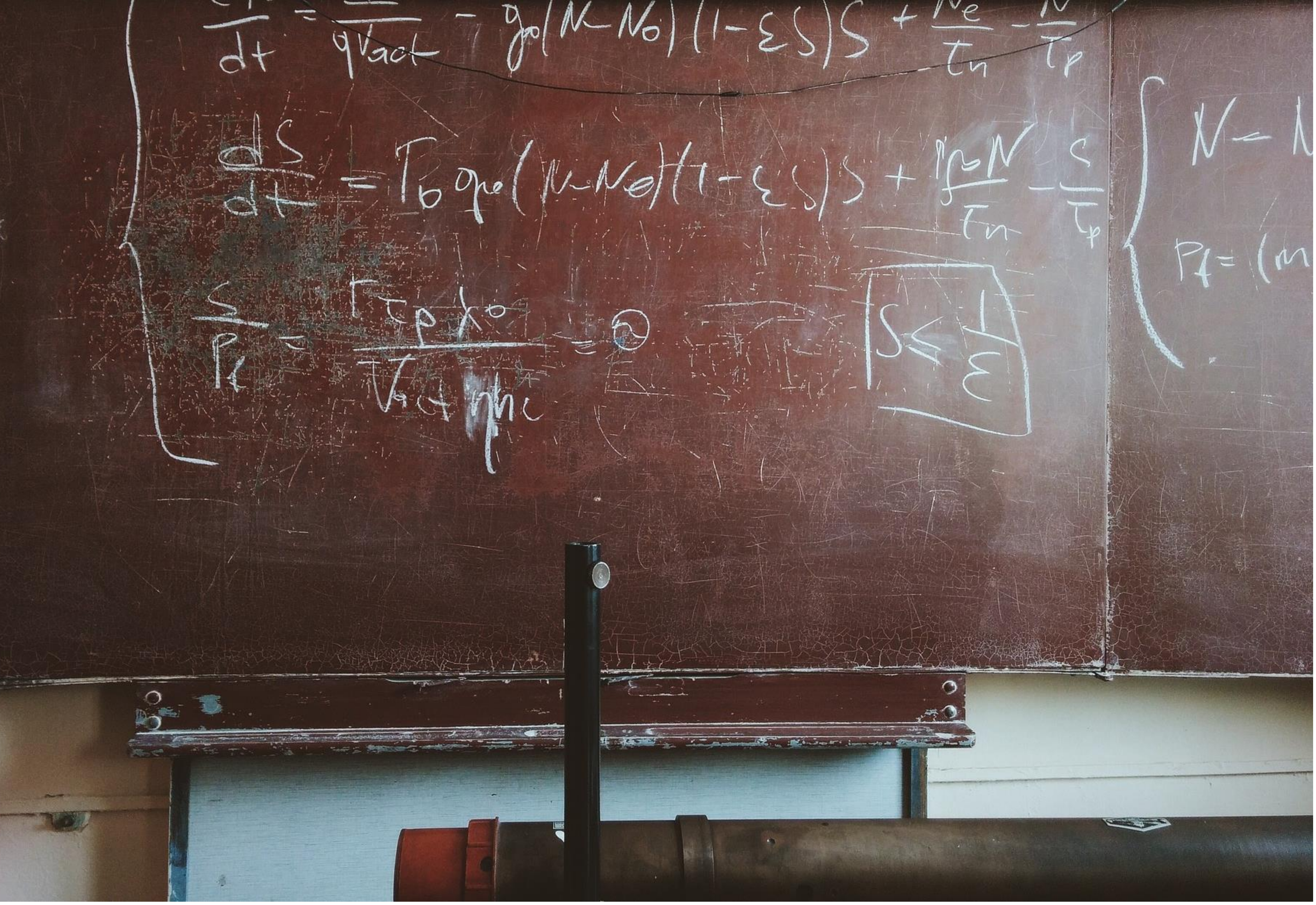
Propiedad 5: si se encuentra un punto medio de los límites de la función f

Figura 3: Propiedad 4



$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Fuente: (Teoremas, s.f.)



3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Antes de demostrar el teorema fundamental, se toma la definición inicial del siguiente teorema.

3.1. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

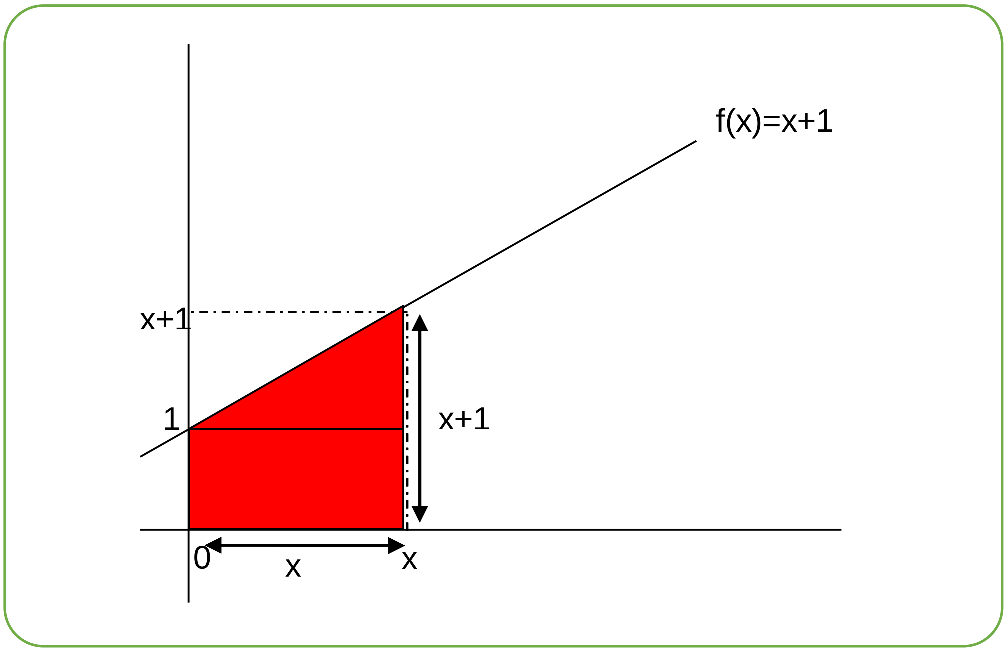
Si f es continua en [a, b], entonces existe c $\in$ [a, b] tal que: $\int_a^b f(x)dx$ = f(c)·(b – a

Ejemplo:

¿Cuál es F(x), la función área asociada a f(x)=x+1 en el intervalo $[0,2]$*?*

Teniendo en cuenta que dicha función F(x) representa el área encerrada por la función f(x)=x+1 entre a y x, dibujemos la gráfica y calculemos dicha área:

Figura 4: *Teorema de Valor Medio*



Fuente: (Integral_definida, s. f.)

Podemos comprobar que el área encerrada entre a y x por la función f(x)= x+1 es:

Área del rectángulo = x

Área triángulo = $\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$

Área encerrada por f(x)=x+1 entre a y x

$$\text{área asociada} = \frac{x^2}{2} + x$$

Por tanto, hemos llegado a la conclusión que si nos dan la función f(x)=x+1 su función área asociada es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$

¿Será casualidad que si derivamos F(x) obtengamos f(x)? es decir, ¿será casualidad que F(x) sea una primitiva de f(x)?

R: no es casualidad, como lo demuestra el siguiente teorema:

3.2 Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

F(x) es una función continua en [a, b], entonces su función asociada F(x) = $\int_a^x f(x)dx$*, con x* $\in$ *[a, b], es derivable y se verifica que F'(x) = f(x).*

(Pinto, 2012)

Ejercicio1: Calcula la integral definida dada por la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo cerrado $[1, 2]$**.** (Contreras, 2003)

- Dada la función se debe buscar una anti derivada de ésta, esto es:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x$$

Si ésta función se deriva, se obtiene la función original.

- Se sustituye la función original con el signo de integral y se escriben los límites de integración.

$$\int_{1}^{2}\left(x^{3}-6x^{2}+9x+1\right)dx$$

- Se aplican las propiedades de la integral definida.

$$\int_{1}^{2}\left(x^{3}-6x^{2}+9x+1\right)dx=\int_{1}^{2}x^{3}\,dx-6\int_{1}^{2}x^{2}\,dx+9\int_{1}^{2}x\,dx+1\int_{1}^{2}dx$$

$$=\left.\frac{x^{4}}{4}\right|_{1}^{2}-\left.\frac{6x^{3}}{3}\right|_{1}^{2}+\left.\frac{9x^{2}}{2}\right|_{1}^{2}+\left.x\right|_{1}^{2}$$

- Se evalúan las integrales, sustituyendo el límite superior (2) menos el límite inferior (1); estos valores se sustituyen por la “x” en la ecuación anterior, de la siguiente manera:

$$\left.\frac{x^{4}}{4}\right|_{1}^{2}-\left.\frac{6x^{3}}{3}\right|_{1}^{2}+\left.\frac{9x^{2}}{2}\right|_{1}^{2}+\left.x\right|_{1}^{2}=\frac{2^{4}}{4}-\frac{6(2)^{3}}{3}+\frac{9(2)^{2}}{2}+(2)-\left[\frac{1^{4}}{4}-\frac{6(1)^{3}}{3}+\frac{9(1)^{2}}{2}+(1)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{48}{3}+\frac{36}{2}+2-\frac{1}{4}+\frac{6}{3}-\frac{9}{2}-1=\frac{17}{4}u^{2}$$

Por lo tanto, el valor de la integral es: $\int_{1}^{2}\left(x^{3}-6x^{2}+9x+1\right)dx=\frac{17}{4}\;u^{2}$

Ejercicios Propuestos:

Desarrolle las siguientes integrales aplicando las propiedades

- $\int_{2}^{4} \frac{x}{2}\, dx =$
- $\int_{2}^{2} x^3\, dx =$
- $\int_{1}^{3} \left(3x^2 + 2x\right) dx =$
- $\int_{3}^{5} \frac{1}{3} x\, dx =$
- $\int_{0}^{4} 5x^2\, dx =$

Aplique el Teorema Fundamental de Cálculo para realizar los siguientes ejercicios, Calcula el área de la región comprendida por la función, Realiza la gráfica.

I. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, entre x = -1 y x = 2.
II. Sea la función $f(x) = x + 5$ en el intervalo cerrado $[-2, 3]$.

BIBLIOGRAFÍA

- ***Cálculo Integral.* (2015).** Obtenido de https://documents.tips/...
- **Contreras, R. D. (2003).** *Cálculo Diferencial e Integral II.* Recuperado el 21 de 5 de 2017, de Colegio de bachilleres: 200.57.38.181/671/Shared%20Documents/GuiaCADI-II.doc
- ***Integral_definida.* (s. f.).** Recuperado el 21 de 05 de 2017, de https://matesjaranda.wikispaces.com/...
- ***Matesap*. (02 de 05 de 2017).** Obtenido de https://matesap.wikispaces.com/...
- **Pinto, A. (2012).** *La integral definida.* Obtenido de https://es.slideshare.net/...
- ***Pixabay*. (s.f.).** Recuperado el 12 de 05 de 2017, de https://pixabay.com/...
- **Rondón, D. J. (2010).** *Cálculo Integral.* Bogotá: UNAD.
- ***Teoremas*. (s.f.).** Recuperado el 05 de 21 de 2017, de http://www.fca.unl.edu.ar/...
- ***Unican.* (2004).** Recuperado el 21 de 05 de 2017, de personales.unican.es/gonzaleof/Sociales_2/areasS2.pdf

CRÉDITOS UPTC EQUIPO DE PRODUCCIÓN

Autor / compilador: Erika Geraldine Pérez Lemus

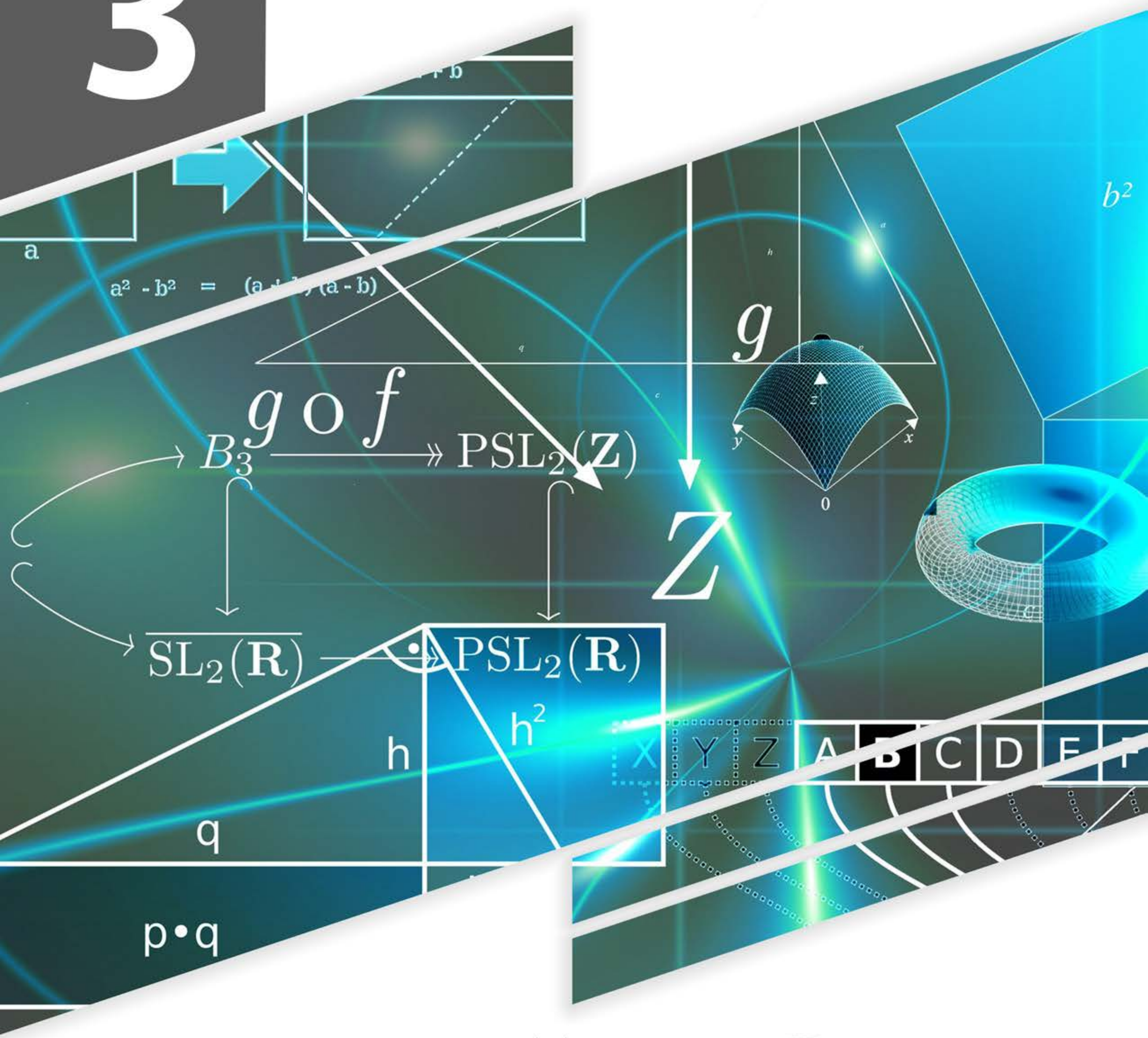
Equipo de Producción: Comité de gestión y calidad FESAD
Departamento de Innovación Académica

Versión 1.0 – Septiembre de 2017

CÁLCULO INTEGRAL

Unidad 3

Aplicaciones de la Integral



Uptc
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

FESAD

Departamento de Innovación Académica

TABLA DE CONTENIDO

Conocimientos Previos Requeridos

El estudiante debe estar en capacidad de usar, manejar y aplicar en el contexto los temas que se describen a continuación:

- Sumatorias
- Series y sucesiones
- Derivadas, límites
- Integrales indefinidas y definidas
- Técnicas de integración

Competencias

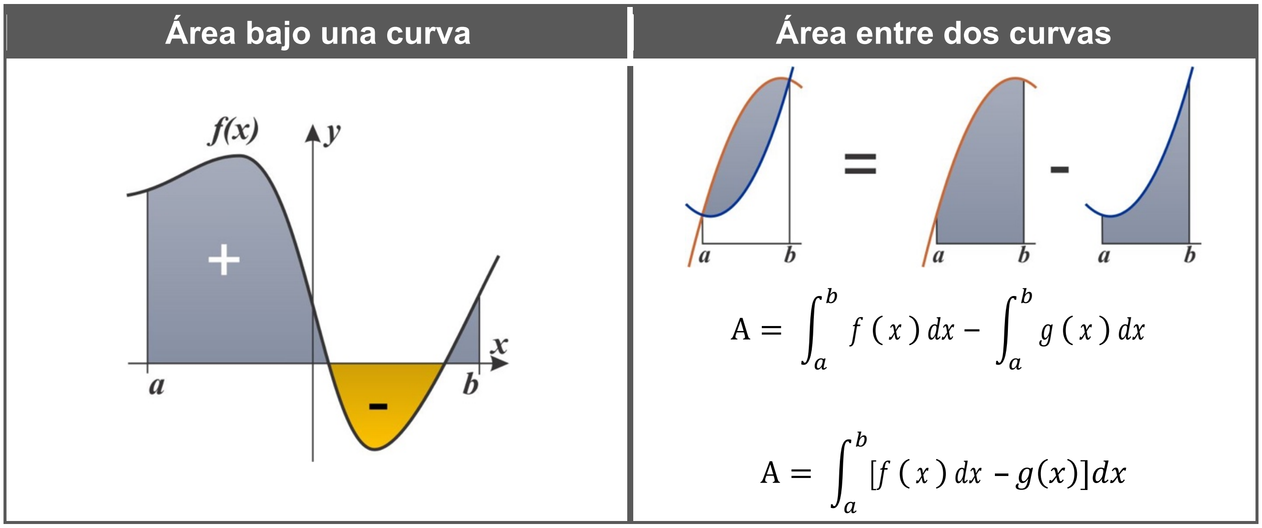
Al finalizar esta unidad, el estudiante debería estar en capacidad de:

- Identificar las propiedades de la integral, para asociar símbolos, significados y conceptos.

- Comprender el uso y la aplicación que se requieren en el contexto para solucionar aplicaciones del cálculo integral en la vida diaria.
- Adquirir destrezas en el manejo de las múltiples variables que intervienen en la solución de problemas aplicados.

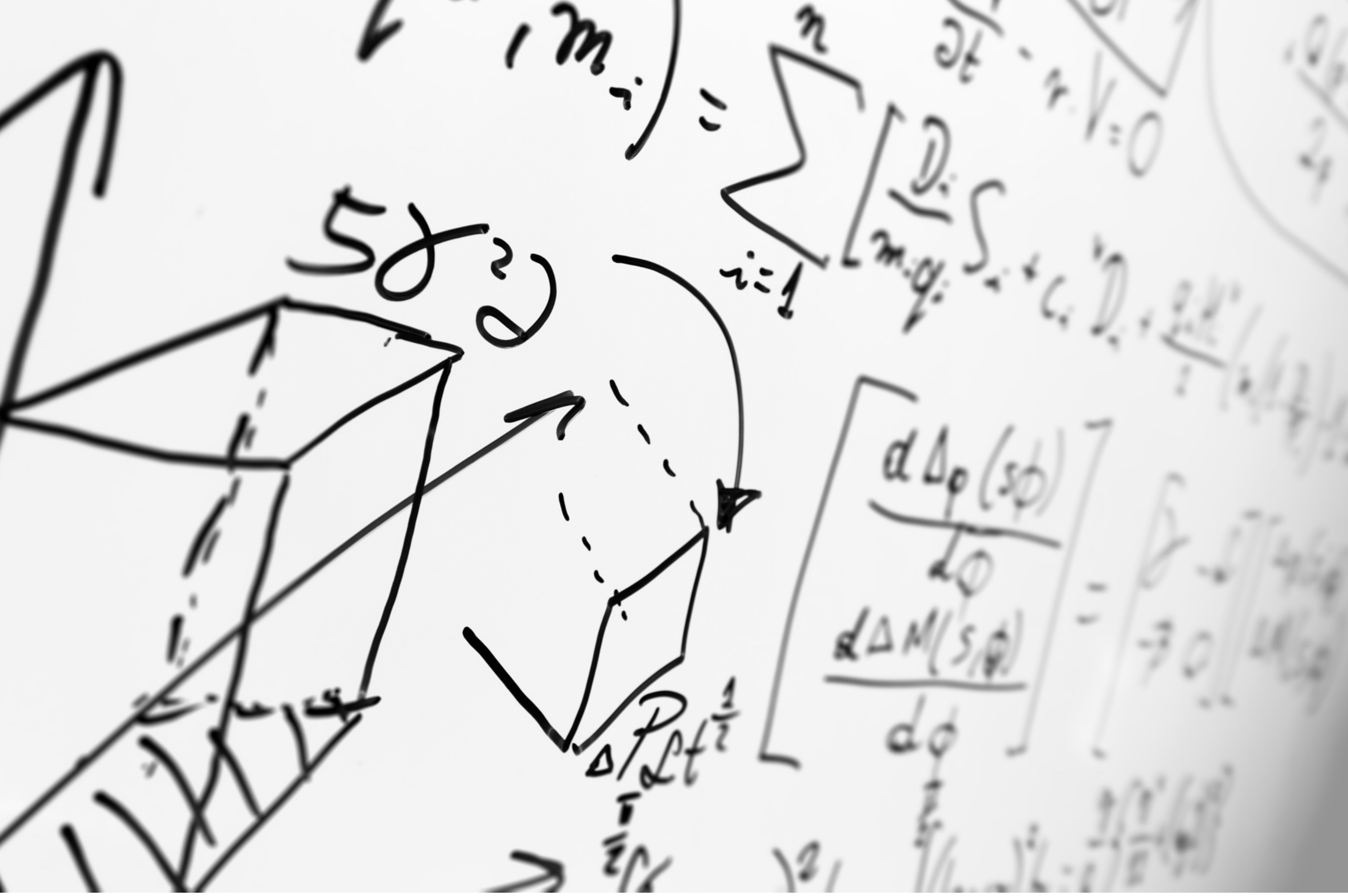
APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Figura 1. Áreas bajo la curva



Fuente: (Fuentes, 2015)**.**

Después de abordar los temas de métodos y técnicas para solucionar integrales, se estudiarán las diversas aplicaciones de las integrales en Ingeniería, Física, Estadística, Economía, Administración, Geometría y otras.



1. ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

1.1 Área Bajo la Curva de una Función

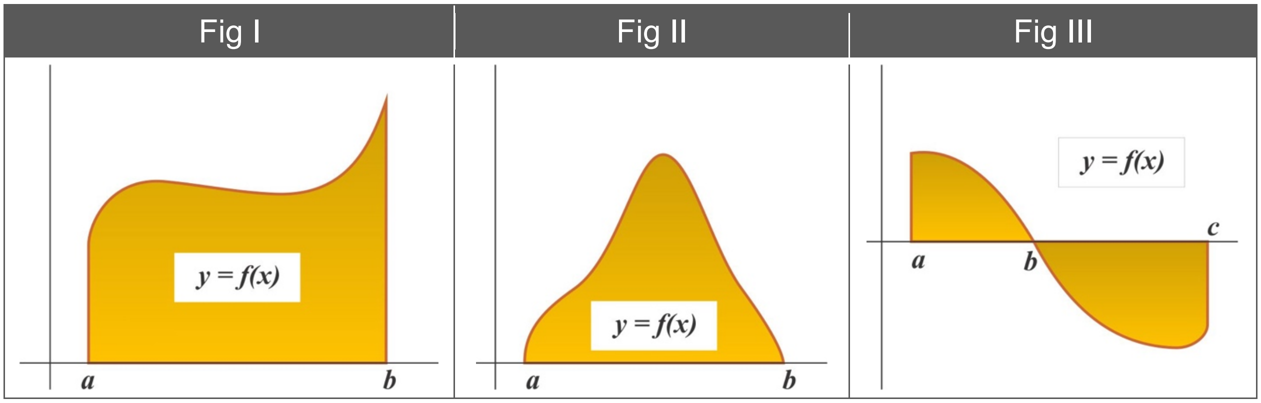
Al definir y estimar el área bajo la curva de una función se establece el intervalo $[a, b]$ en el cual la función se toma para establecer el área. Además, se observa la posición de la función en el plano cartesiano.

Entonces según la función en el plano cartesiano se pueden presentar de tres formas posibles:

- La función entre dos rectas
- La función interceptada en algún eje al eje
- La función que cruza el eje x

En la siguiente figura se identifica cada caso:

Figura 2. Comportamiento de curvas según su gráfica



Fuente: (Soriano, 2011).

Al calcular el área comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, sabiendo que f es integrable en $[a;\ b]$. Se debe considerar que:

1.1.1 Área de una función f positiva o cero en el intervalo [a; b]

El gráfico de f está sobre el eje x como se muestra en la figura 2 anterior I y II.

Evidencia cuando una función f es positiva (I) o cero en el intervalo (II) [a; b], el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b es:

$$A = \int_a^b f\,(x)\,dx$$

A = Área
$F(x)$ = Función
a y b = Límites inferior y superior

Ejemplo 1:

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 1$, *entre* $x = 1$ *y* $x = 3$.

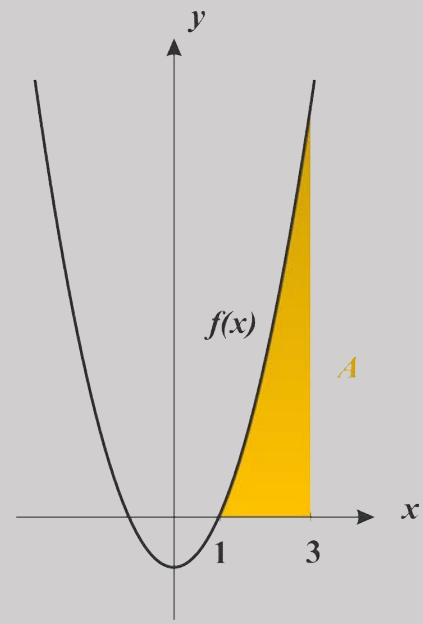
$$A = \int_1^3 x^2 - 1\,dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} - x \Big|_1^3$$

$$A = \left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)$$

$$A = (9 - 3) - \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{A = \frac{20}{3}}$$



Por tanto el valor del Área de la función en el intervalo $[1,3]$ es $20/3$ unidades cuadradas (Buxton, 2015).

1.1.2 Área de una función f está por debajo del eje x intervalo [a; b]

El gráfico de f está debajo del eje x como se muestra en la figura 2 anterior III, en el intervalo [b,c].

Se puede decir que la función f es negativa o cero en el intervalo [a; b], en este caso se plantea la integral con el signo negativo.

$$\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

A = Área
$F(x)$ = Función
a y b = Límites inferior y superior

Ejemplo 2:

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f\ (x)\ = -x^2\ -\ 1$ *entre* $x\ =\ -2$ *y* $x\ =\ 1$.

$$A = -\int_{-2}^{1} -\, x^2 - 1\,dx \;=\; -\int_{-2}^{1} -\,(x^2 + 1)dx$$

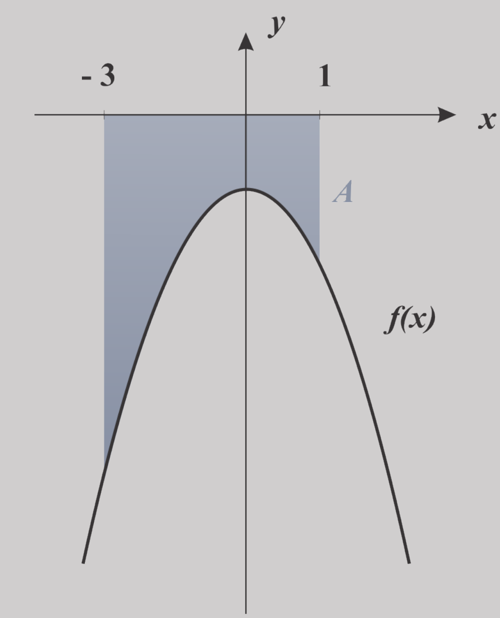
$$A = \int_{-2}^{1} x^2 + 1\,dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} + x\,\Big|_{-2}^{1}$$

$$A = \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)\right)$$

$$A = \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{14}{3}\right)$$

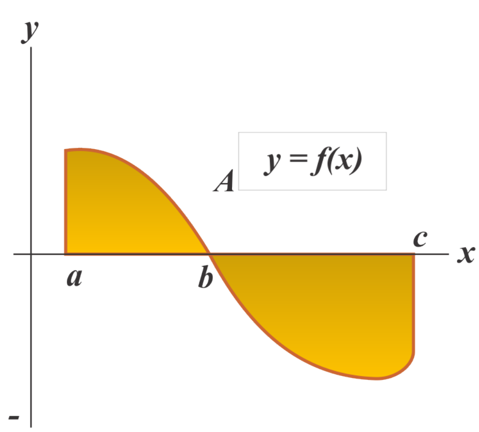
$\boldsymbol{A = \frac{18}{3}}$, *entonces* $\boldsymbol{A = 6}$



(Buxton, 2015)

1.1.3 Área de una función f en varios intervalos según la gráfica [a; b]

El gráfico de f tiene dos intervalos en los que la función se define de diferente manera, con respecto del eje x como se muestra en la figura 2 anterior III, en el intervalo $[a, b]$ y $[b, c]$.



Entonces, se debe calcular A, solo si se realiza una suma al calcular el área A_1 comprendida entre el gráfico III de f y el eje x para a ≤ x ≤ b y el área A_2 comprendida entre el gráfico III de f y el eje x para b ≤ x ≤ c.

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

A = Área
$F(x) =$ Función
a, b y c = Límites inferior y superior

Ejemplo 3:

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, *entre* $x = -1$ *y* $x = 2$. (Buxton, 2015)

Según la gráfica de la función se establecen dos intervalos $[-1,1]\ y\ [1,2]$

$\mathrm{A} = -\int_{-1}^{1} x^2 + 2x - 3\,dx + \int_1^2 x^2 + 2x - 3\,dx$

$\mathrm{A} = -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)$

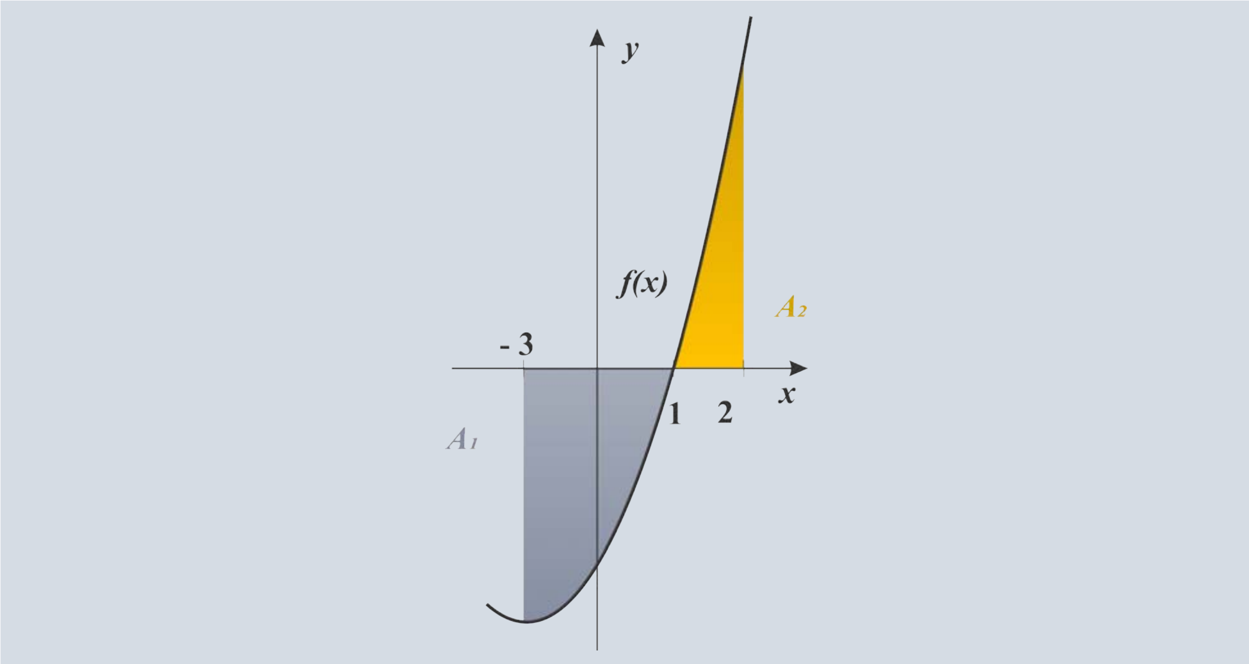
$\mathrm{A} = -\left\{\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \Big|_{-1}^{1}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \Big|_{1}^{2}\right)\right\}$

$\mathrm{A} = -\left\{\left(\frac{-1^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right) - \left(\frac{-1^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right)\right\}$

$+\left\{\left(\frac{-1^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right) - \left(\frac{-1^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right)\right\}$

$\mathrm{A} = \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)\right)\ A = \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{14}{3}\right)$

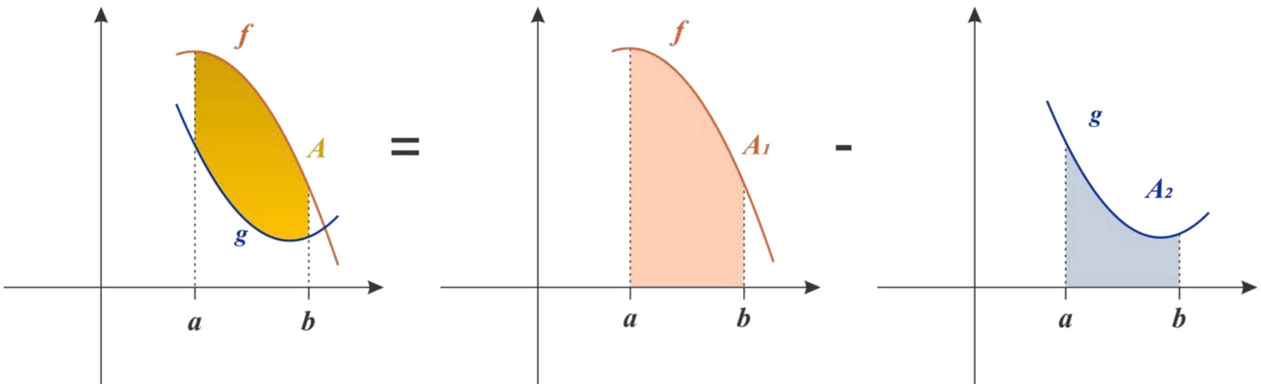
$\boldsymbol{A = \frac{18}{3}}$, entonces $\boldsymbol{A = 6}$



1.2 Área Bajo la Curva Entre Dos Funciones

Al definir y estimar el área comprendida entre dos funciones se establece el intervalo *[a,b]* en el cual las funciones se evaluarán por el área en común. Además, se observa la posición de la función en el plano cartesiano.

Figura 3. Área dada por dos funciones



Fuente: (Buxton, 2015).

Para calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones de f y g para $a \leq x \leq b$. En este caso, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a; b]$.

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$A_2 = \int_a^b g(x)dx$$

La integral para hallar el área es: $$A = A_1 - A_2$$

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

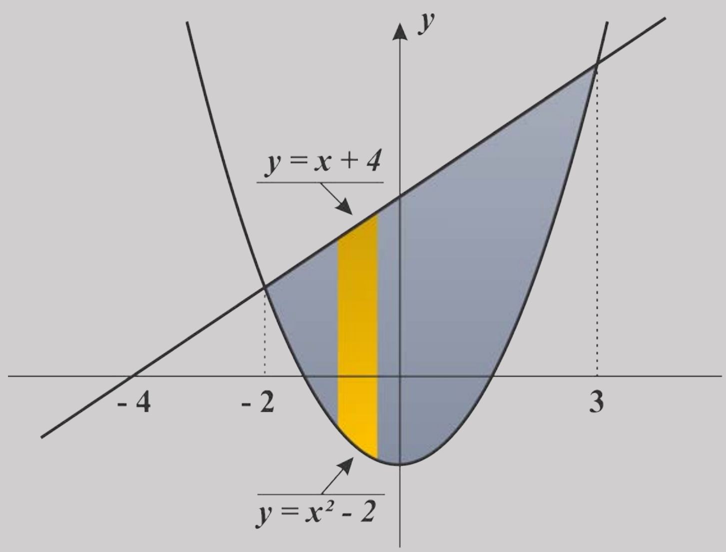
Entonces

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Eonces para hallar el área de una región plana, dadas dos funciones se debe:

- Graficar las funciones dadas.
- Identificar la región que tienen en común las funciones y definir los límites de integración.
- Definir un rectángulo diferencial para que sea un elemento representativo.
- Definir la integral o las integrales para él área.
- Evaluar la integral definida.

Ejemplo 1:
calcular el valor del área de la región limitada por $$\begin{cases} \boldsymbol{y = x + 4} \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$
Se grafican las funciones $y = x2 - 2$ y $\boldsymbol{y = x + 4}$ en el mismo plano cartesiano.



- Se identifica en el plano el rectángulo diferencial y los límites de integración igualando las ecuaciones.

$$\begin{matrix} y = x + 4 \\ y = x^2 - 2 \end{matrix} \rightarrow x + 4 = x^2 - 2$$

$$0 = x^2 - x - 4 - 2$$

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$0 = (x - 3)(x + 2)$$

$$x = 3 \wedge x = -2$$

- Se plantea la integral con los límites de integración -2 a 3

$$A = \int_{-2}^{3} (x + 4) - (x^2 - 2)\, dx \rightarrow A = \int_{-2}^{3} (x + 4) - (x^2 - 2)\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} x + 4\, dx - \int_{-2}^{3} x^2 - 2\, dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right] - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right] \Big|_{-2}^{3} \rightarrow A = \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right] - \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right] \Big|_{-2}^{3}$$

$$A = \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_{-2}^{3} \rightarrow A = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \Big|_{-2}^{3}$$

$$A = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6(3)\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2)\right)$$

$$A = \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 12\right)$$

$$A = \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 12\right)$$

$$A = -9 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{8}{3} + 2 + 12$$

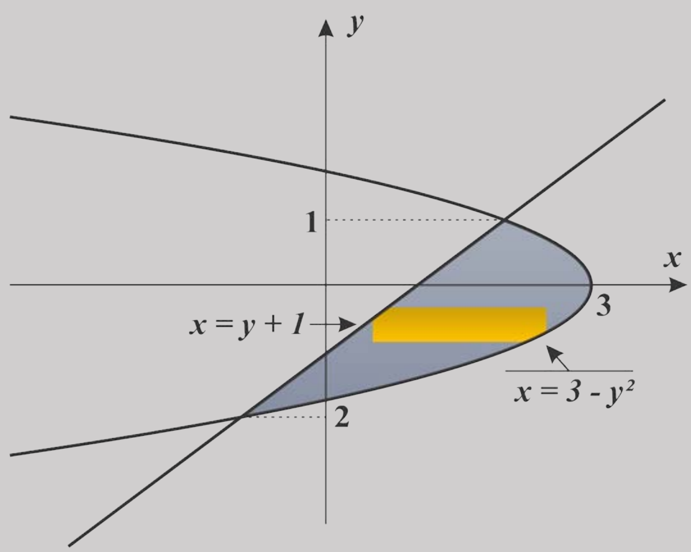
$$\boldsymbol{A = \frac{5}{6}}$$

Ejemplo 2:

Calcular el valor del área de la región limitada por

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = x - 1} \\ x = 3 - y^2 \end{cases}$$

- Se grafican las funciones $\boldsymbol{y = x - 1}$ y $x = 3 - y^2$ en el mismo plano cartesiano



- Se identifica en el plano el rectángulo diferencial y los límites de integración igualando las ecuaciones.

$$\begin{matrix} \boldsymbol{y = x - 1} \\ x = 3 - y^2 \end{matrix} \rightarrow 3 - y^2 = y + 1$$

$$0 = y^2 + y - 3 + 1$$

$$0 = y^2 + y - 2$$

$$0 = (y + 2)(y - 1)$$

$$y = -2 \wedge y = 1$$

- Se plantea la integral con los límites de integración -2 a 1 en el eje y.

$$\mathrm{A} = \int_{-2}^{1} (3 - y^2) - (\boldsymbol{y + 1})\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (3 - y^2) dx - \int_{-2}^{1} (\boldsymbol{y + 1})\, dx$$

$$A = \left[3y - \frac{y^3}{3}\right] - \left[\frac{y^2}{2} + y\right] \Big|_{-2}^{1} \rightarrow A = 3y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - y \Big|_{-2}^{1}$$

$$A = -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y - y \Big|_{-2}^{1} \rightarrow A = -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \Big|_{-2}^{1}$$

$$A = \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2(1) \Big|\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \Big|\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{-8}{3} - 2 - 4\right)$$

$$A = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4$$

$$\boldsymbol{A = \frac{9}{2}}$$

1.3 Ejercicios Propuestos

Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función.

a. $y = 2 - x^2, y = x,$

b. $y = 4x - x^2 \; y = 0, entre\; x = 1 \; y \; x = 3 .$

c. $y = x - 4, y = 0 , x = 8 .$

d. $f\,(x) = x^2 - x - 5 \; entre \; x = -1 \; y \; x = 4$

e. $y^2 - 2x = 0, \; y^2 + 4x - 12 = 0 .$

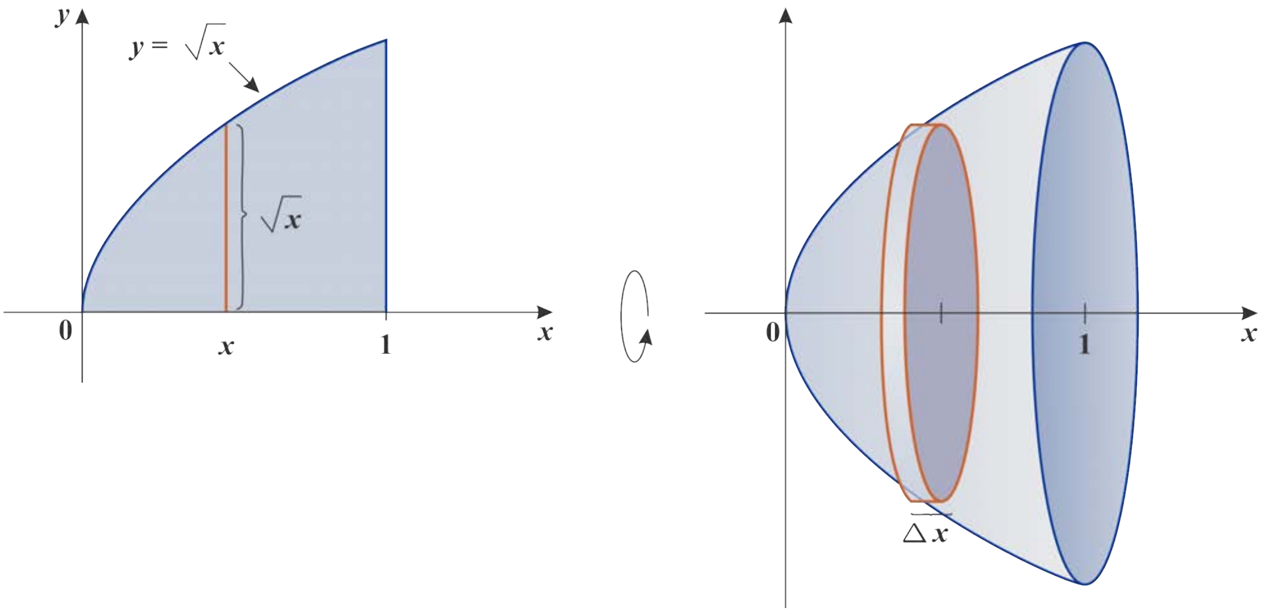
f. $y^2 = x + 2, y = x - 4$

2. SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Al hablar de sólido de revolución se tiene como primera medida, la noción básica de hacer que una región plana graficada en el plano cartesiano, pueda girar con respecto a un eje y haciendo este giro se marque la gráfica obtenida.

Por tanto, la región hará un giro de 360° sin cambiar de amplitud ni de intervalo en la que está definida.

Figura 1. Área dada por dos funciones



Fuente: (Álvarez, 2013)

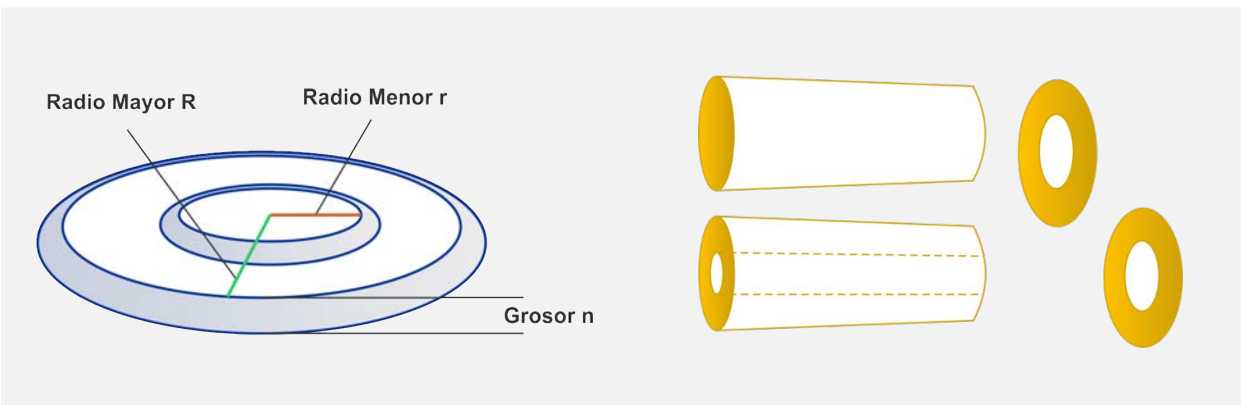
2.1 Volumen de un Sólido de Revolución

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

A = Área
$F(x)$ = Función
a y b = Límites inferior y superior

Para hallar el volumen de un sólido en revolución lo que se hace es establecer la función y graficarla, luego de esto en pocas palabras se corta el sólido generando una arandela u óvalo, el cual se caracteriza por la siguiente gráfica.

Figura 5. Volumen del sólido partiendo de los datos de las rebanadas o arandelas que se realizan en el corte



Fuente: (Rondón, 2007).

Haciendo uso de los datos siguientes para establecerlos:

$$V = \int_a^b \pi \left[\left(R(x) \right)^2 - (r(x))^2 \right] dx$$

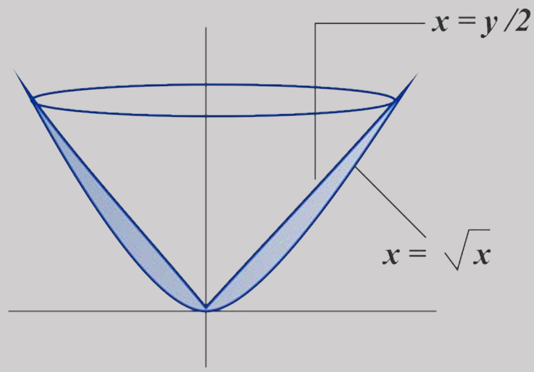
R = radio mayor
r = radio menor
a, b = Límites inferior y superior
π= constante

Ejemplo 1:

Hallar el volumen del sólido que se forma haciendo la rotación sobre el eje y, determinado en función de las curvas dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$, ubicadas en el primer cuadrante.

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x^2} \\ g(x) = 2x \end{cases}$$

- Se grafican las $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$ en el mismo plano cartesiano.



- Se identifica en el plano que las curvas dadas hacen rotación sobre el eje Y y por tanto se deben relacionar con el eje determinado en el que se forma el sólido; despejando el eje x.

$$f(x) = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y} \text{ y } g(x) = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}$$

- Se plantea la integral con los límites de integración 0 a 4 que se obtiene con la altura del sólido.

$$V = \int_a^b \pi \left[\left(R(x) \right)^2 - \left(r(x) \right)^2 \right] dx$$

$$V = \int_0^4 \pi \left[\left(\sqrt{y} \right)^2 - \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right] dx$$

$$V = \int_0^4 \pi \left[y - \frac{y^2}{4} \right] dx \rightarrow V = \int_0^4 \pi \, [y] dx - \int_0^4 \pi \left[\frac{y^2}{4} \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^4 [y] dx - \pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} \right] dx \rightarrow V = \pi \int_0^4 [y] dx - \pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} \right] dx$$

$$V = \pi \left[\frac{Y^2}{2}\right]\Big|_0^4 - \pi \left[\frac{Y^3}{12}\right]\Big|_0^4 \rightarrow V = \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]\Big| - \pi \left[\frac{4^3}{12} - \frac{0^3}{12}\right]\Big|$$

$$V = \pi \left[\frac{16}{2} - \frac{0^2}{2}\right]\Big| - \pi \left[\frac{64}{12} - \frac{0}{12}\right]\Big| \rightarrow V = \pi\,[8 - 0] - \pi \left[\frac{16}{3} - 0\right]\Big|$$

$$V = \pi\,[8] - \pi\,\frac{16}{3} \rightarrow V = \left(\frac{24 - 16}{3}\right)\pi$$

$$\boxed{V = \left(\frac{8}{3}\right)\pi}$$

BIBLIOGRAFÍA

- **González, F. J. (2016).** *http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf.* Recuperado el 04 de 05 de 2017, de http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf
- **Finney, T. (1987).** *Cálculo con Geometría Analítica.* MEXICO: Addison Wesley Iberoamericana.
- **Morales, R. G. (s. f.).** *Antecedentes historicos del cálculo integral*. Recuperado el 27 de abril de 2017, de https://es.scribd.com/doc/74346342/Antecedentes-Historicos-Del-Calculo-Integral
- **De Burgos, J. (2007).** *Cálculo infinitesimal de una Variable.* Madrid: McGraw-Hill.
- ***Cálculo-Integral.* (2015).** Obtenido de http://elcaculodenuestratierra.blogspot.com.co/2015/02/calculo-integral.html
- **Gitman, L. J. (2012).** *Principios de administración financiera.* Mexico: Pearson.
- **Dumrauf, G. L. (2013).** *Finanzas corporativas.* Buenos Aires: Alfaomega.
- **Emery, D., & Finnerty, J. (2000).** *Administración financiera corporativa.* México: Pearson.
- **finanzasbrv.blogspot. (s.f.).** *finanzasbrv.blogspot*. Recuperado el 16 de 03 de 2015, de http://finanzasbrv.blogspot.com/p/el-capital-de-trabajo.html
- **Chiavenato, I. (1999).** *Introducción a la teoría general de la administración.* Bogotá D.C.: McGrawn-Hill.
- **Baum, A. M., Milles, S. J., & Schultz, H. J. (1992).** Cálculo Aplicado. México.
- **Granville, W. A. (1980).** integración de formas elementales . En W. A. Granville, *Cálculo diferencial e integral* (pág. 686). Limusa.
- **Aranda, P. (2009).** *Apuntes de Cálculo I*. Recuperado el 22 de 03 de 2017, de http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda/Calpdf/calculo1/ci-pp.pdf
- **Rosenberg, J. M. (2016).** *Dicionario de Administración y Finanzas.* Barcelona: Oceano.
- **Ross, S., Westerfield, R., & Jordan, B. (2001).** *Fundamentos de finanzas corporativas.* México: McGraw-Hill.
- **Fuentes, M. (2015).** *Portafolio de Calculo II.* Recuperado el 14 de 06 de 2017, de https://sites.google.com/site/calculos2015/area-entre-dos-curvas
- **Soriano, T. Z. (2011).** *Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente. México.* Recuperado el 14 de 06 de 2017, de www.tesoem.edu.mx/alumnos/cuadernillos/2011.011.pdf
- **Buxton, C. &. (2015).** *Área entre curvas.* Obtenido de http://www.mate.cbc.uba.ar/28/Areas.pdf

- **Rondón, D. J. (2007).** *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.* Bogotá.
- ***Pixabay*. (s.f.).** Recuperado el 12 de 05 de 2017, de https://pixabay.com/es/vaca-dibujos-animados-gracioso-30710/
- ***Fca.unl*. (s.f.).** Recuperado el 05 de 21 de 2017, de http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Teoremas.htm
- **Rivas, D. C. (01 de 2003).** *Shared.* Recuperado el 21 de 5 de 2017, de Colegio de achilleres : 200.57.38.181/671/Shared%20Documents/GuiaCADI-II.doc
- ***Unican .* (11 de 06 de 2004).** Recuperado el 21 de 05 de 2017, de personales.unican.es/gonzaleof/Sociales_2/areasS2.pdf
- ***Integral_definida.* (s.f.).** Recuperado el 21 de 05 de 2017, de https://matesjaranda.wikispaces.com/file/view/Integral_definida.doc
- **Älvarez, J. &. (2013).** *Cálculo I*. Recuperado el 17 de 05 de 2017, de https://s10g6a2013.wordpress.com/author/calculogrupo6/
- ***Integrales*. (2017).** Obtenido de https://matesap.wikispaces.com/file/view/ejercicios+sobre+integrales.doc

Autor / compilador: Erika Geraldine Pérez Lemus

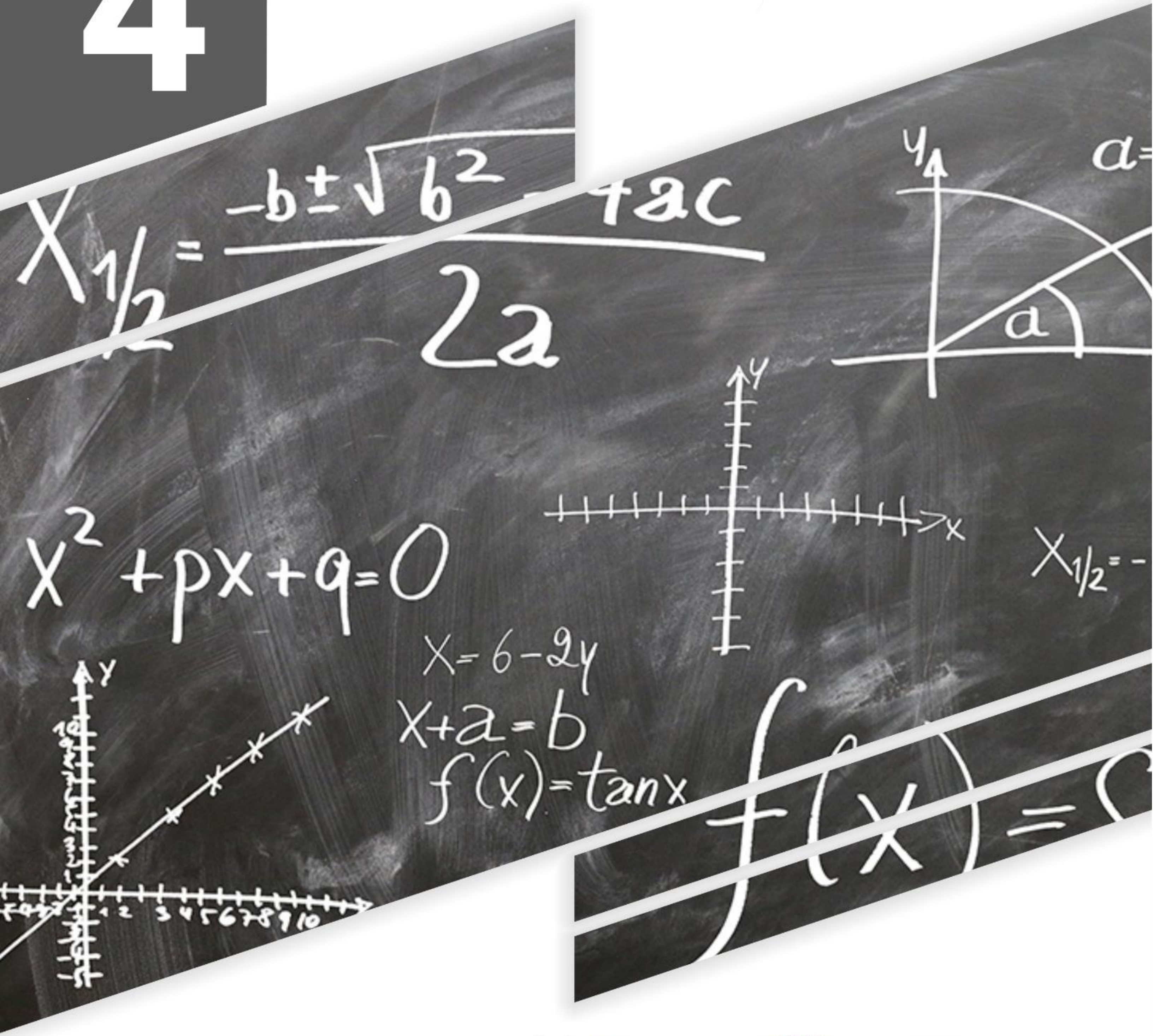
Equipo de Producción: Comité de gestión y calidad FESAD
Departamento de Innovación Académica

Versión 1.0 – septiembre de 2017

CÁLCULO INTEGRAL

Unidad 4

Aproximaciones Polinomiales, Sucesiones y Series Infinitas.



Uptc

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

FESAD

Departamento de Innovación Académica

Contenido

INTRODUCCIÓN

Conocimientos previos requeridos

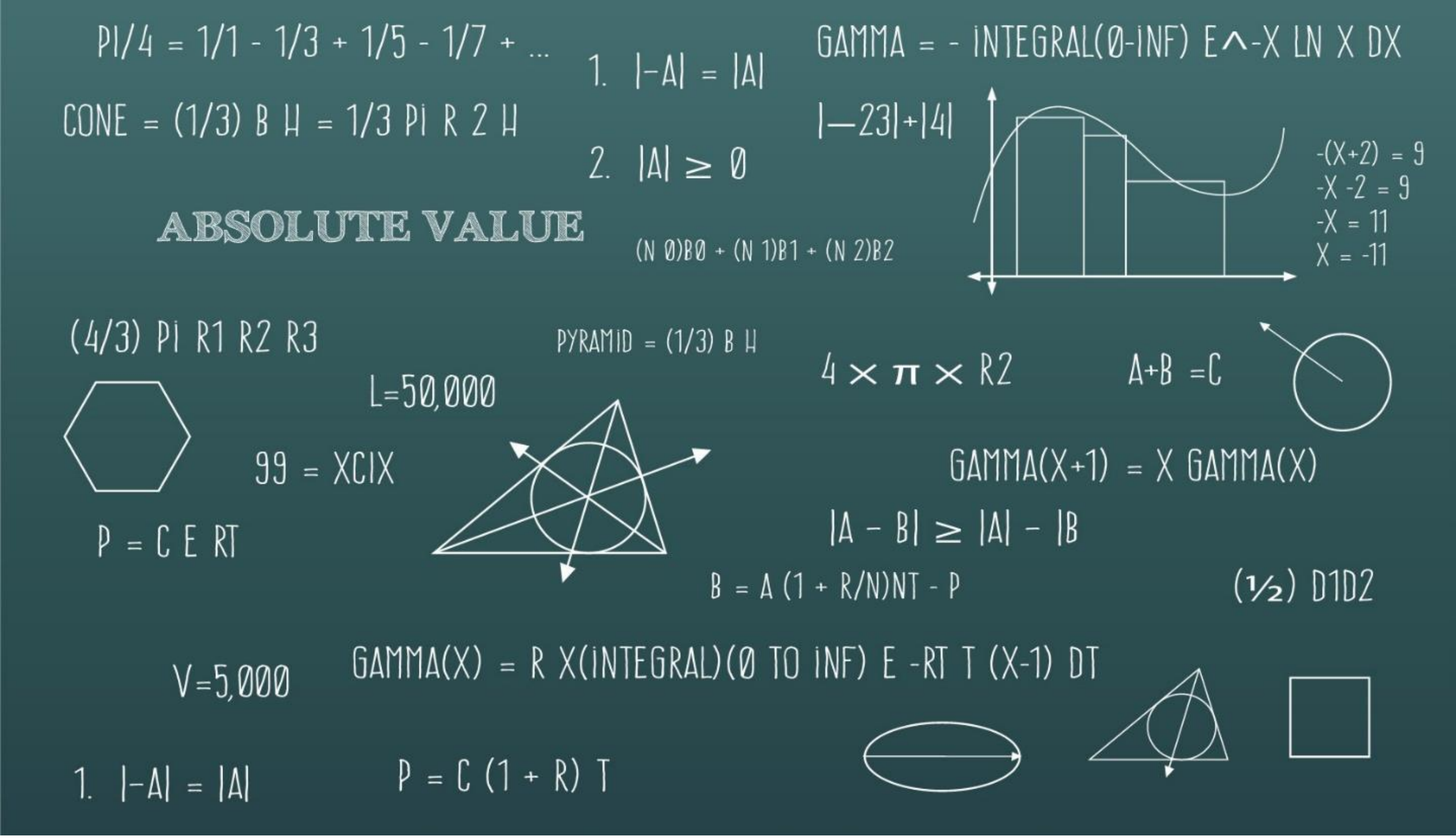
El estudiante debe estar en capacidad de usar, manejar y aplicar en el contexto los temas que se describen a continuación:

- Operaciones básicas de algoritmos
- Derivadas, límites
- Técnicas de integración

Competencias

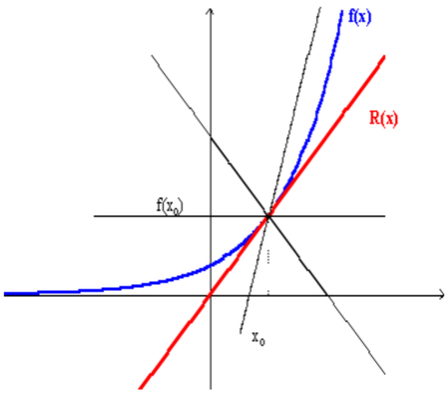
Al finalizar esta unidad, el estudiante deberá estar en capacidad de:

- Identificar las propiedades y conceptos, para asociar símbolos, significados de los teoremas trabajados.
- Comprender el uso y la aplicación que se requiere en el contexto para solucionar aplicaciones del cálculo integral en la vida diaria.
- Adquirir destrezas en el manejo de las múltiples variables que intervienen en la solución de problemas aplicados.



1. APROXIMACIONES POLINOMIALES SUCESIONES Y SERIES INFINITAS

Figura 1. Aproximaciones polinomiales



Fuente: (Tellechea, 2000).

Es importante que se establezcan los términos abordados anteriormente en los temas relacionados con métodos y técnicas para solucionar integrales; además, se estudiarán las diversas aplicaciones de las integrales en Ingeniería, Física, Estadística, Economía, Administración, Geometría y otras.

1.1 Aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor

Figura 2. Brook Taylor (1685-1731)

Fuente: (Granger, 2012).

Nació en Edmonton (Inglaterra). Estudió Derecho en la Universidad de Cambridge y se doctoró en el año 1714. Habiendo estudiado Matemáticas con John Machin (profesor de Astronomía) y John Keill (discípulo de **Isaac Newton**), resolvió el problema del “centro de oscilación” en el año 1708, aunque no fue publicado hasta 1714. En 1712 ingresó en la Royal Society.

Entre sus obras destaca *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* publicada en 1715, en la que se presenta el teorema conocido ahora como **Fórmula de Taylor** o **Teorema de Taylor.** (Irving, 1898).

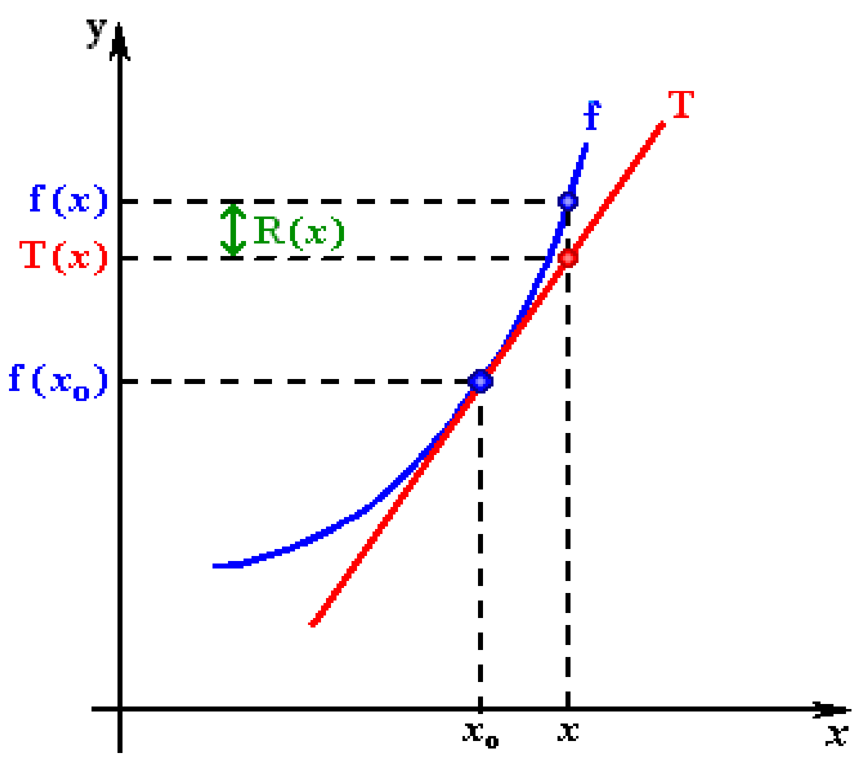
Video Recomendado:
Polinomio de Taylor - Introducción - CBC - UBA
https://www.youtube.com/watch?v=Fjf1abVBDPU

Al hablar de polinomios se hace necesario tratar funciones algebraicas para definir, y definir funciones; las aproximaciones de una función mediante polinomios pueden ser de tipo local cuando se construye un polinomio cercano en un punto de partida con derivadas apuntando a un punto fijo y las aproximaciones globales se basan en obtener el polinomio coincidente con la función de partida en un intervalo, y compagina con la función, con su primera y/o segunda derivada en varios puntos del intervalo descrito.
En este tema se estudiará la fórmula de Taylor o bien llamado polinomio de Taylor el cual es basado en una aproximación local. Entonces según cada función aplicada se puede presentar de tres formas posibles:

- La función entre rectas
- La función semejante o aproximada a la función
- La función o recta tangente según la definición de derivadas

En la siguiente figura se identifica cada caso:

Figura 3. Definición gráfica de la fórmula de Taylor



Fuente: (Lima, 2012).

Donde:

- R es el grado de la función definida según el polinomio
- T es la recta tangente a la función f en un punto $(x_0, f(x_0))$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

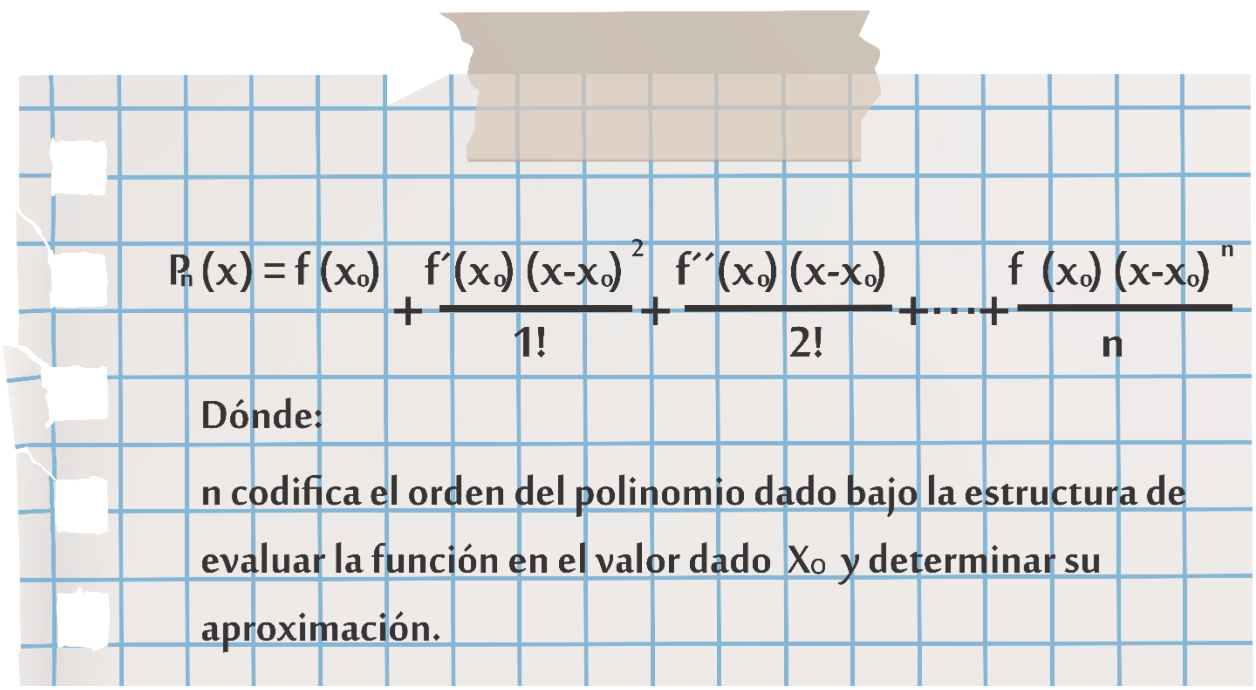
- Y , $f(x)$ como resultante

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

1.1.1 Fórmula de Taylor

Sea *f* una función cuyas "n" derivadas existen en un intervalo *I*, y estas no tienen un tamaño excesivo; es decir, están acotadas;

Sea *f* : $D \subset R \rightarrow R$ una función que se puede derivar n veces en un punto $x_0 \in$ D. Además existe un único polinomio $P\ (x)$ de grado menor o igual que n, que verifica dicho polinomio:



Realizar el proceso matemático de evaluar una función mediante el polinomio de Taylor permite aproximar los valores haciendo uso de las operaciones básicas, aplicar las propiedades de las sumatorias, aproximar derivadas e integrales, entre otros.

Cuando la función es relacionada es continua y derivable en un punto específico delimitado como x_0, la recta tangente buscada en un entorno x_0 es la más parecida y su ecuación es:

$$P_1(x) = f(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)$$

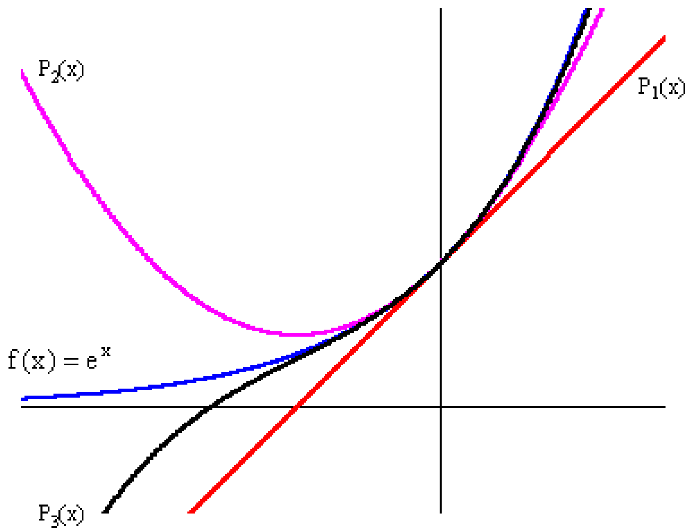
Geométricamente esto significa que la recta pasa por el mismo punto que la función en x_0 y además, la inclinación de la función en ese punto es la misma que la de la recta.

El polinomio P1(x) es una primera aproximación de la función f(x) y cabe esperar que, al aumentar su grado de algún modo, es decir al construir un polinomio.

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Un polinomio que se parezca aún más a f(x). En concreto, si f(x) es dos veces derivable en x_0 y se calcula a imponiendo que $P_2(x_0) = f''(x_0)$, Geométricamente, esto se traduce *en que el polino|mio $P_2(x)$ tiene una curvatura o concavidad muy parecida a la de f(x) en un entorno de x_0. Si f(x) es n veces derivable en x_0 se puede repetir este proceso y obtener un polinomio de grado n según se indica en la siguiente proposición* (Polinomio de Taylor, 2016)*.*

Figura 4. Aproximación polinomial de una función determinada

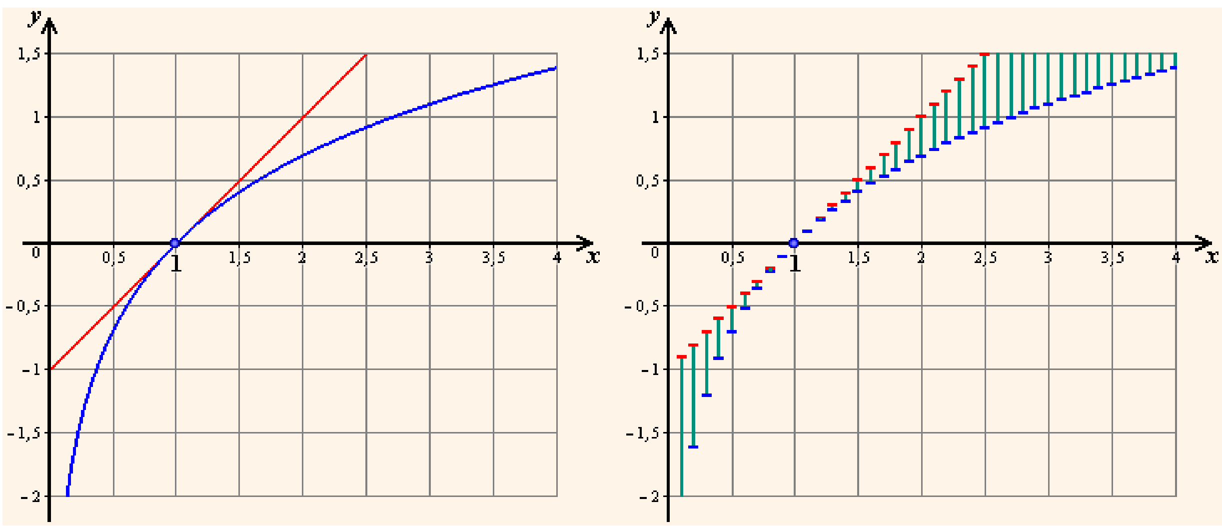


Fuente: (Tellechea, 2000)**.**

Ejemplo 1:

Comportamientos de las derivadas según lo establece la función dada mediante la recta tangente.

Figura 5. Comportamiento del proceso de aproximación por la fórmula de Taylor



Fuente: (Lima, 2012).

Ejemplo 2:

Calcular el Polinomio de Taylor de orden o grado 2 de la función exponencial $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = 1$

- Se hace uso del polinomio estableciendo el grado; en este caso grado 2

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)\,(x - x_0)^2}{2!}$$

- Se reemplaza $x_0 = 1$

$$p_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)\,(x-1)^2}{2!}$$

- Se halla la primera y la segunda derivada de la función

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \mathrm{f(x) = x}^{1/2}$$

Primera derivada. $f'(1)$ $f'(1) = \frac{1}{2}(x^{-1/2})$

$$f'(1) = \frac{1}{2}(1^{-1/2})$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

Segunda derivada. $f''(1)$

$$f'(1) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(x^{-3/2})\right]$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(1^{-3/2})\right]$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4}$$

- Solucionar el factorial o los obtenidos:

2! = 1*2 1! = 1

- Se reemplaza $x_0 = 1$ en la función.

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \mathrm{f}(1) = \sqrt{1} \rightarrow \mathrm{f}(1)? = 1$$

- Se toma el polinomio principal y se reemplazan valores

$$p_2(x) = 1 + \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{1} + \frac{-\frac{1}{4}\ (x-1)^2}{2}$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}\ (x-1)^2$$

1.2 Sucesiones

Para hablar de sucesiones debemos determinar y conceptualizar el dominio de una función, teniendo en cuenta que el dominio de las sucesiones la mayoría de las veces es el conjunto de los números naturales, y el rango de la sucesión es un subconjunto de los números reales, los cuales cumplen condiciones prescritas.

Una sucesión infinita, o simplemente sucesión, es una función considerada como variable independiente, se simboliza con la letra "*S*" acompañada siempre de un subíndice "*n*"; de esta manera se nombra término *n-ésimo* de una sucesión a "*Sn*".

Entonces la sucesión es expresada como composición de términos según la ubicación y el orden denotado así:

$$\mathrm{S_n} = \{\mathrm{a_1, a_2, a_3, a_{4\,,\ldots\ldots,}a_n}\}$$

De esta manera es apropiado demostrar que las sucesiones en general, son un conjunto de números reales en un orden específico. Cada número es llamado un término de la sucesión y se pueden clasificar como sucesiones finitas o infinitas.

Ejemplo 1: las sucesiones se caracterizan por definir los términos con un punto o puntos suspensivos

a) 2, 4, 6, 8….

b) -27, -24,…,30

1.2.1 Sucesiones de números reales

En este tipo de sucesiones se definen conjuntos no vacíos con elementos que pertenecen a los números naturales aplicados a los números reales.

Por tanto, la aplicación se da definiendo el número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para *n 1*;*2*;*3,* cada término respectivo a los términos de la sucesión. De esta manera la sucesión puede ser considerada forma apropiada como vector con infinitos elementos, y/o términos:

$$\{(-1)^n\} \text{ y } \{(-1)^{n+1}\}$$

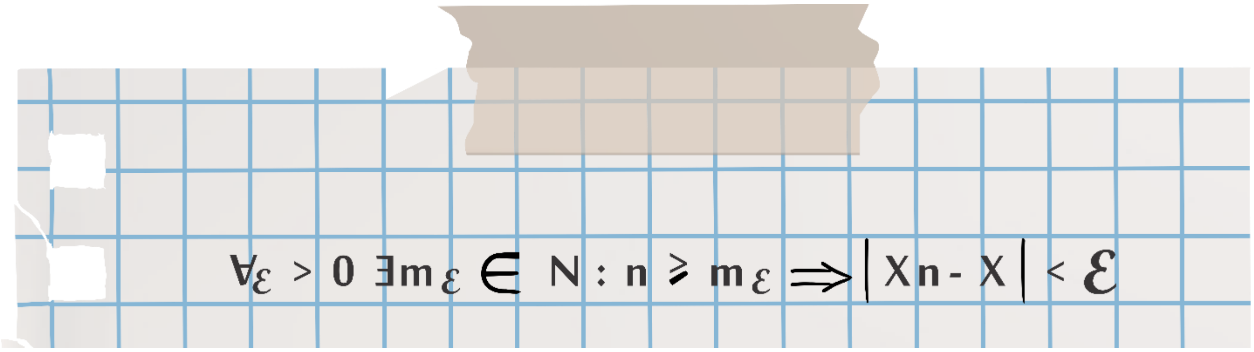
y elementos así

$$(-1, 1, -1, 1, \ldots) \text{ y } (1, -1, 1, -1, \ldots).$$

1.2.2 Sucesiones convergentes

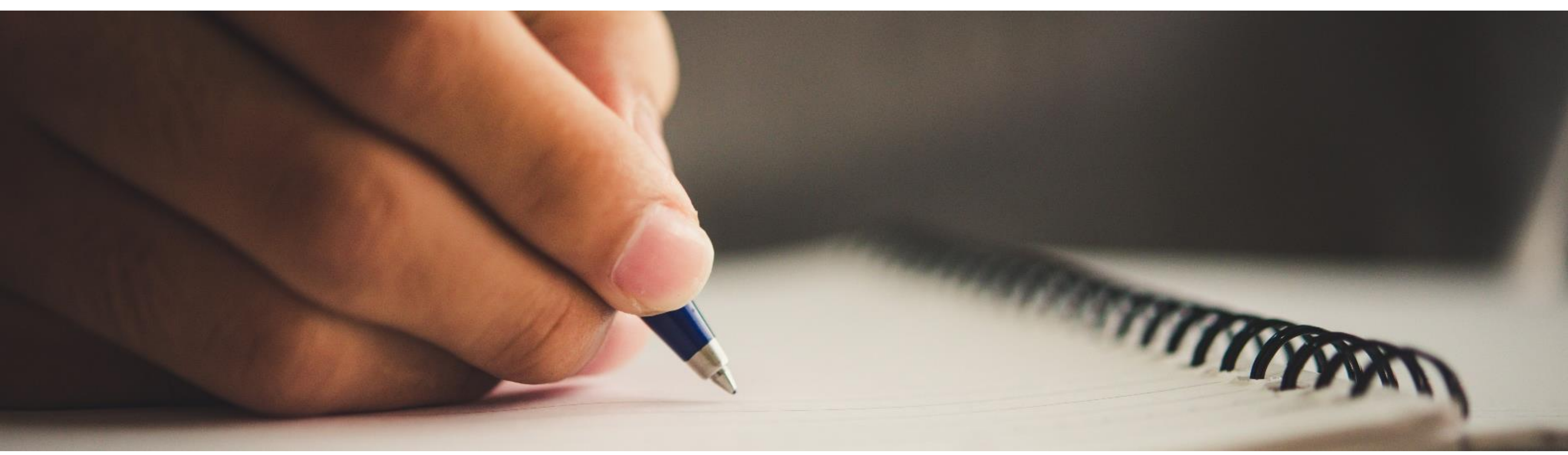
Es una sucesión que se denomina **convergente ya que converge a un número real *x*** si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural "*m*" tal que si *n* es cualquier número natural mayor o igual que "*m*" se cumple que:

jx_n — xj < ε. Simbólicamente:



En donde la sucesión fx_ng *se dice que es:*

- ***Mayorada o acotada superiormente*** *si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número µ 2 R tal que x_n 6 µ para todo n 2 N.*
- ***Minorada o acotada inferiormente*** *si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número h 2 R tal que h 6 x_n para todo n 2 N.*
- ***Acotada*** *si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número*
- *M 2 R^C tal que jx_nj 6 M para todo n 2 N.*
- ***Creciente*** *si x_n 6 x_{nC1} para todo n 2 N.*
- ***Estrictamente creciente*** *si x_n < x_{nC1} para todo n 2 N.*
- ***Decreciente*** *si x_n > x_{nC1} para todo n 2 N.*
- ***Estrictamente decreciente*** *si x_n > x_{nC1} para todo n 2 N.*
- ***Monótona*** *si es creciente o decreciente.*
- ***Estrictamente monótona*** *si es estrictamente creciente o decreciente* (Sucesiones, s.f.)



1.3 Series de potencias

En diversas aplicaciones son de importancia y trascendencia las series infinitas cuyos términos contienen una o más variables, como es el siguiente caso:

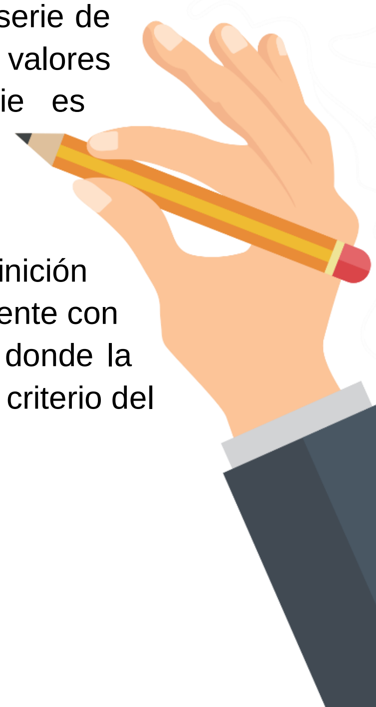
Definición: sea "x" una variable del campo de los reales.

Entonces una serie de la forma:

$$a_n \; x^n \quad a_0 \quad a_1 x \quad a_2 x^2 \quad a_n x^n$$
$$n0$$

Se denomina "serie de potencias en *x*"

Para simplificar el término general se asume que x^0 1, aun en el caso de que *x* 0. Es evidente que en una serie de potencias lo que se pretende es determinar los valores de la variable "*x*" para los cuales la serie es convergente.



Lo primero que se observa, de acuerdo con la definición anterior, es que la serie de potencias es convergente con *x* 0*.* Para determinar los demás valores de "*x*" donde la serie es convergente, se utilizará básicamente el criterio del cociente (D'Alembert) tratado con anterioridad.

TEOREMA. Sea una serie de potencias $a_n\ x^n$ Entonces:

n 0

- La serie es convergente solamente para x 0.
- La serie es absolutamente convergente para todo valor real de "x", esto es, en x
- Existe un valor positivo "r", llamado "radio de convergencia", tal que la serie es absolutamente convergente, si

Convergente si $|x|$ r, esto es, si r x r (intervalo de Convergencia).

y Divergente si $|x|$ r, es decir, si x r x r

BIBLIOGRAFÍA

- **Granger. (2012).** *fineartamerica*. Recuperado el 17 de 02 de 2017, de https://fineartamerica.com/...
- **Irving, E. (1898).** *Dictionary of National Biography.* Recuperado el 17 de 02 de 2017, de https://www.matesfacil.com/...
- **Lima, R. L. (2012).** *Cálculo Diferencial e Integral I*. Obtenido de http://www.uff.br/webmat/...
- ***Polinomio de Taylor.* (2016).** Obtenido de http://bjglez.webs.ull.es/...
- **Soriano, T. Z. (2011).** *Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México.* Recuperado el 14 de 06 de 2017, de www.tesoem.edu.mx/...
- ***Sucesiones.* (s. f.).** Obtenido de https://www.uam.es/...
- **Tellechea, E. (2000).** *mat.uson.mx* Recuperado el 02 de 10 de 2017, de http://www.mat.uson.mx/...

Imágenes tomadas de Freepik.

Las citas textuales de este material las encuentran con la fuente en cursiva.

CRÉDITOS UPTC EQUIPO DE PRODUCCIÓN

Autor / compilador: Erika Geraldine Pérez Lemus

Equipo de Producción: Comité de gestión y calidad FESAD
Departamento de Innovación Académica

Versión 1.0 – Enero de 2018